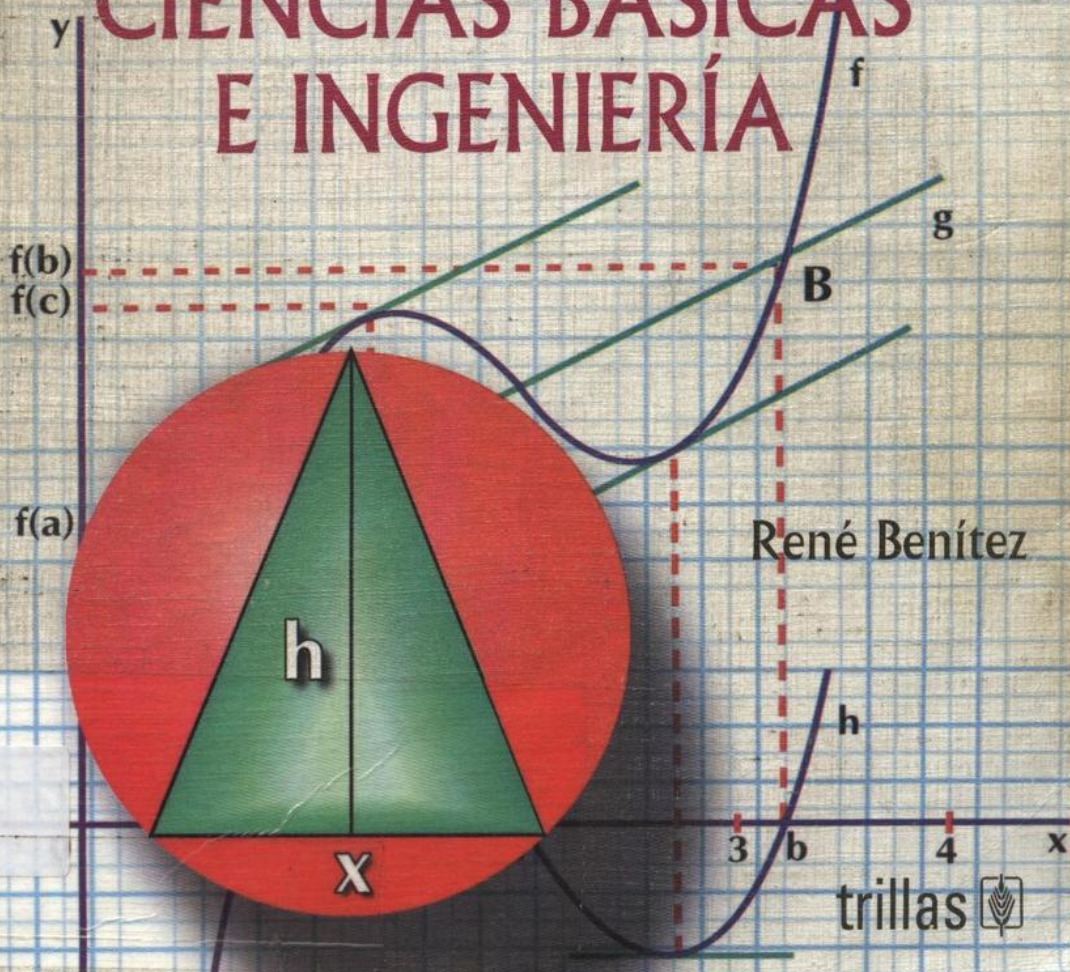


CÁLCULO DIFERENCIAL PARA CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA



mch659-1997-9

\$ 184.00

CÁLCULO DIFERENCIAL PARA CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA



DESARROLLO DE COLECCIONES

DGB - BUAP

INFO. 6223

No. FACTURA

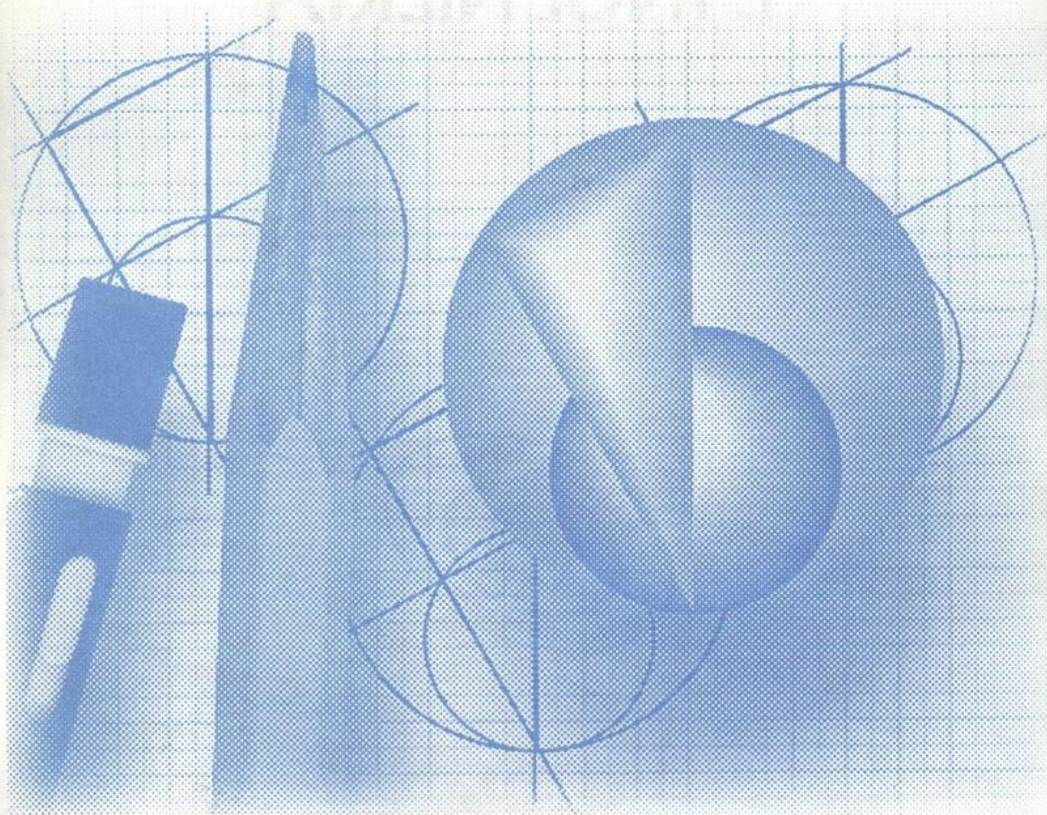
01/03/2006

RESERVA



RESERVA

M. en C. René Benítez
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa



CÁLCULO DIFERENCIAL PARA CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

René Benítez

EDITORIAL
TRILLAS



México, Argentina, España,
Colombia, Puerto Rico, Venezuela

FCC-4506

QA304

B46

Catalogación en la fuente

Benítez López, René

Cálculo diferencial para ciencias básicas e ingeniería. --
preedición -- México : Trillas, 1997 (reimp. 2003).

340 p. ; 27 cm.

Incluye índices

ISBN 968-24-3150-6

1. Cálculo diferencial. 2. Ingeniería. 3. Matemáticas de
Ingeniería. I. t.

D-620.004'B163c

LC- T57'B4.2

2946

La presentación y disposición en conjunto de
CÁLCULO DIFERENCIAL PARA CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o transmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados

© 1997, Editorial Trillas, S. A. de C. V.,
División Administrativa, Av. Río Churubusco 385,
Col. Pedro María Anaya, C. P. 05340, México, D. F.
Tel. 56884233, FAX 56041364

División Comercial, Calz. de la Viga 1132, C. P. 09439
México, D. F. Tel. 56330995, FAX 56330870

www.trillas.com.mx

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Preedición, 1997 (ISBN 968-24-3150-6)

Primera reimpresión, junio 2003

Impreso en México
Printed in Mexico

Esta obra se terminó de imprimir
el 30 de junio de 2003,
en los talleres de Irema, S. A. de C. V.
Se encuadernó en Acabados Editoriales Anfre'd.
BM2 80 XSS

RESERVA

Prólogo

La presente obra ha sido diseñada como texto de un primer curso de cálculo diferencial para estudiantes de Ciencias Básicas e Ingeniería.

La obra ofrece un desarrollo del cálculo mediante diversos procedimientos didácticos, los cuales se caracterizan como sigue:

- Se parte de lo conocido por los estudiantes para llegar a la generalización de los conceptos. Además, con mucha frecuencia, lo abstracto y meramente teórico se comenta en forma gráfica y operacional para hacerlo concreto.
- Se estimula en los estudiantes la actividad intelectual necesaria para la adquisición, generalización y transferencia de los conocimientos.
- Para hacer duradera y quizá perdurable la adquisición de conocimientos se hace énfasis en el significado geométrico de la teoría. Así mismo, se presentan suficientes y variados ejemplos, los cuales ofrecen a los estudiantes una nueva experiencia en el cálculo.
- Se incluyen comentarios, notas y observaciones aclaratorias que son un magnífico apoyo en el manejo de los conceptos y la comprensión de los mismos.
- Se refuerza el aprendizaje con series de ejercicios, los cuales se han elaborado para reafirmar y lograr la transferencia de los conocimientos adquiridos.

La obra pretende ser un valioso apoyo didáctico en la enseñanza del cálculo para mis compañeros maestros y una rica fuente de conocimientos formadora de hábitos, capacidades y habilidades matemáticas para el estudiante.

Si ello se lograra mi esfuerzo estaría enormemente recompensado.

El autor

Para el maestro

Como una guía del proceso de enseñanza-aprendizaje, este texto presenta las siguientes características didácticas:

Motivación

Cada capítulo inicia con una introducción. En ella se encuentran ideas para motivar a los estudiantes ofreciéndoles un panorama general de la importancia del tema y de sus posibles aplicaciones en la vida cotidiana o de las relaciones que tiene con sus experiencias o conocimientos adquiridos y, en muchos de los casos, con los antecedentes históricos del tema.

Método

Se encadena dialécticamente la inducción (de lo fácil a lo difícil) y la deducción (de lo abstracto a lo concreto).

Conocimientos

El texto contiene los temas de estudio básicos de un primer curso de cálculo diferencial adaptables a los enfoques de los programas de las instituciones de educación superior y de educación media superior. Por ejemplo, para un enfoque operacional y gráfico del cálculo, úsense las propiedades (teoremas, lemas o corolarios) en la presentación de ejemplos y evitense las demostraciones rigurosas de algunas de ellas o de todas ellas. O sea, en un enfoque operacional y gráfico se recomienda evitar el rigor. Los conceptos, las definiciones, propiedades y fórmulas se enmarcan para resaltar su importancia. Además, se refuerza el aprendizaje con series de ejercicios presentados al final de cada sección para reafirmar y transferir los conocimientos adquiridos.

Cabe mencionar que los capítulos 1 y 2 pueden omitirse si así lo juzga conveniente el profesor, y darlos como referencia y consulta a aquellos estudiantes que requieran información sobre algún tema particular de dichos capítulos, lo que le permitirá comprender mejor el desarrollo del cálculo.

Evaluación

Al final de la obra se incluyen las respuestas a los ejercicios impares para que el estudiante verifique su capacidad de aprendizaje.

Para el estudiante

Este texto se ha diseñado para ser amigable con usted; o sea, para que tenga usted un amigo que en todo momento esté dispuesto a aclarar sus dudas a través de conceptos, definiciones, propiedades, fórmulas y ejemplos. Cuando un libro de texto se estudia con atención, paciencia y perseverancia, automáticamente el que así lo estudia se convierte en su propio maestro o maestro de sí mismo. Nadie es tan sabio como para afirmar (sin mentir) que jamás ha consultado un libro, ni nadie es tan ignorante como para renunciar a la sensación que se vive cuando consultando un libro se resuelve un ejercicio. El secreto está en desarrollar capacidades y habilidades matemáticas a través de muchas horas de estudio y preparación (lo necesario y suficiente), aclarando dudas en libros, en revistas, con algunos compañeros de estudio y, por supuesto, con el profesor. Si no puede resolver algún ejercicio, no se dé por vencido, consulte nuevamente la teoría, repasando con atención los ejemplos, en los cuales se encontrará la información necesaria para seguir adelante. Por último, cabe mencionar que al final de esta obra se incluyen las respuestas de los ejercicios impares para que usted verifique su capacidad de aprendizaje. Buena suerte!

Índice de contenido

Prólogo		5
Capítulo 1	Conjuntos	11
	1.1 Concepto y notación	11
	1.2 Pertenencia	13
	1.3 Determinación de conjuntos	14
	1.4 Conjunto vacío	16
	1.5 Conjunto universal	17
	1.6 Diagramas de Venn	17
	1.7 Subconjuntos	18
	1.8 Intervalos	19
	1.9 Producto cartesiano	22
	1.10 Álgebra de conjuntos	25
Capítulo 2	Números reales	33
	2.1 Propiedades de las operaciones	34
	2.2 Desigualdades	40
	2.3 Valor absoluto	48
	2.4 Sobre números racionales e irracionales	54
	2.5 Axioma del supremo	65
	2.6 Inducción matemática	69
Capítulo 3	Funciones	75
	3.1 Concepto de función	75
	3.2 Dominio, rango y gráfica de una función	81
	3.3 Operaciones entre funciones	94
	3.4 Inversa de una función	100
	3.5 Funciones trigonométricas	106
	3.6 Funciones trigonométricas inversas	126
	3.7 Funciones exponenciales y logarítmicas	131
Capítulo 4	Límites y continuidad	139
	4.1 Noción intuitiva de límite	140
	4.2 Cálculo de límites	148
	4.3 Definición formal de límite	154
	4.4 Límites al infinito	165
	4.5 Límites infinitos	172
	4.6 Límites de las funciones trigonométricas	182
	4.7 Límites de las funciones logaritmo y exponencial	190
	4.8 Continuidad	198
	4.9 Formas indeterminadas	208

Capítulo 5	La derivada	211
	5.1 Pendiente de la tangente a una curva	212
	5.2 La derivada como límite de una función	214
	5.3 Reglas de derivación	221
	5.4 n -ésima derivada de una función	236
	5.5 Derivación implícita	239
	5.6 Razón de cambio	244
	5.7 Diferenciales	254
	5.8 Método de Newton	259
Capítulo 6	Aplicaciones de la derivada	267
	6.1 Máximos y mínimos	267
	6.2 Teorema del valor medio	274
	6.3 Funciones monótonas	279
	6.4 Criterios de la primera y segunda derivadas	284
	6.5 Concavidades y puntos de inflexión	292
	6.6 Trazo de gráficas	297
	6.7 La regla de L'Hôpital	306
	6.8 El teorema de Taylor	314
	Respuestas a los ejercicios impares	320
	Índice analítico	339

1 CONJUNTOS

1.0 Introducción

La teoría de conjuntos se desarrolla parcialmente en este capítulo, en cuanto a su notación y a sus operaciones y algunas de sus relaciones; particularmente, como un antecedente para estudiar las funciones y sus operaciones en forma precisa y cómoda, se da importancia a las operaciones con intervalos los cuales son conjuntos especiales de números reales.

De ninguna manera se piense encontrar aquí un desarrollo riguroso hipotético-deductivo de la teoría de conjuntos. Sólo se encontrarán nociones básicas de dicha teoría presentadas en forma intuitiva, operacional y gráfica para desarrollar (si así se prefiere) de manera simplificada algunos aspectos del cálculo diferencial.

1.1 Concepto y notación

Intuitivamente se acepta que:

Conjunto es una colección arbitraria de objetos

Ejemplo 1

- a) Las vocales forman un conjunto.
- b) Los números 0, 1 y 2 forman un conjunto.
- c) Los números que son raíces de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$, forman un conjunto.
- d) Los números naturales que satisfacen la desigualdad $x + 2 < 5$, forman un conjunto.

Los objetos que forman un conjunto se llaman *elementos* del conjunto.

Ejemplo 2

- a) Las letras a,e,i,o,u son los elementos del conjunto formado por las vocales
 b) 2 y 3 son los elementos del conjunto formado por las raíces de la ecuación

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Los conjuntos se denotan con las letras mayúsculas $A, B, C, \dots, W, X, Y, Z$, encerrando sus elementos entre llaves $\{ \}$ y separándolos con comas.

Ejemplo 3

El conjunto formado por los números 0 y 1 se escribe $A = \{0,1\}$ y se lee "conjunto A formado por 0 y 1".

Convencionalmente las letras **N, Z, Q y R** se reservan para denotar los siguientes conjuntos de números

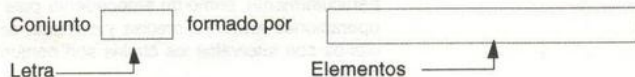
$$N = \{\text{números naturales}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$Z = \{\text{números enteros}\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

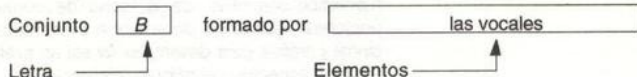
$$Q = \{\text{números racionales}\}$$

$$R = \{\text{números reales}\}$$

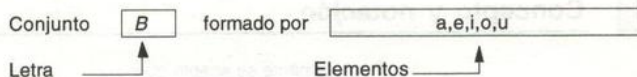
La lectura de conjuntos se hace de acuerdo con el modelo que sigue:

**Ejemplo 4**

$B = \{\text{vocales}\}$ se lee:



O también así:

**Ejercicios 1.1**

Liste entre llaves $\{ \}$ los elementos de cada conjunto.

Ejemplo: $A = \{\text{divisores de } 2\} = \{-2, -1, 1, 2\}$

1. $A = \{\text{factores primos de } 6 \text{ mayores que } 1\}$

3. $C = \{\text{números naturales } x \text{ tales que } 0 < x \leq 9\}$

5. $E = \{\text{números de la forma } x-1 \text{ con } x = 1, 2, 3\}$

Handwritten solution for E:

$$E = \{0, 1, 2\}$$

$1-1=0$
 $2-1=1$
 $3-1=2$

2. $B = \{\text{Raíces de } x^2 - 2x - 3 = 0\}$

4. $D = \{\text{números enteros } x \text{ tales que } x^2 < 10\}$

6. $F = \{\text{números naturales pares}\}$

Handwritten solution for F:

$$F = \{2, 4, 6, \dots, 8, \dots\}$$

1.2 Pertenencia

Para indicar que un elemento x pertenece a un conjunto A se usa el símbolo " $\in$ " y se escribe $x \in A$ leyéndose " x pertenece a A ", " x está en A " o brevemente " x en A ".

Ejemplo 1

- a) Si $A = \{1, 2, 3\}$, entonces $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$.
 b) Si $B = \{\text{raíces de } x^2 - x = 0\}$, entonces $0 \in B$, y $1 \in B$.

Para indicar que un elemento x no pertenece a un conjunto A se usa el símbolo " $\notin$ " y se escribe $x \notin A$ leyéndose " x no pertenece a A ", " x no está en A " o " x no en A ".

Ejemplo 2

Si A es el conjunto de números naturales n tales que $n - 1 < 5$; entonces $6 \notin A$ porque $6 - 1$ no es menor que 5.

Ejemplo 3

Si B es el conjunto de números de la forma $\frac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{n}}$ con $n = 1, 2, 3$;

entonces

$$B = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4} \right\}.$$

Ejemplo 4

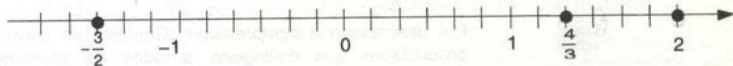
Localizar en la recta numérica los elementos del conjunto

$$M = \left\{ \frac{(-1)^n}{1 - \frac{1}{n}} : n = 2, 3, 4 \right\}.$$

Solución

Para $n = 2$ se tiene: $\frac{(-1)^n}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{(-1)^2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

En esta forma se obtuvo uno de los elementos de M ; o sea, $2 \in M$. En la misma forma con $n=3, 4$ se obtienen los otros elementos de M . Enseguida se presentan localizados en la recta numérica los elementos de M .



Ejercicios 1.2

En los ejercicios del 1 al 3, use los símbolos $\in$ y $\notin$ para relacionar cada conjunto con los elementos que se indican.

Ejemplo: Si $M = \{\text{máximo común divisor de 6, 9 y 12}\}$; entonces $1 \in M$, $3 \in M$, $2 \notin M$.

1. Si $A = \{\text{cuadriláteros}\}$, entonces:

Rombo ☐ A Rectángulo ☐ A Trapecio ☐ A Hexágono ☐ A
Cuadrado ☐ A Triángulo ☐ A Pentágono ☐ A Romboide ☐ A

2. Si $B = \{\text{números de la forma } \frac{n}{n-1} \text{ con } n = 2, 3, 4\}$, entonces

$-\frac{2}{3}$ ☐ B 2 ☐ B 1 ☐ B $-\frac{3}{2}$ ☐ B $\frac{3}{4}$ ☐ B $\frac{4}{3}$ ☐ B

3. Si $C = \{\text{raíces de } x^2 - 3x - 4 = 0\}$, entonces

1 ☐ C -1 ☐ C 4 ☐ C -4 ☐ C 2 ☐ C -2 ☐ C

En cada ejercicio del 4 al 6, encuentre 5 elementos que pertenezcan al conjunto dado.

4. $A = \{\text{números de la forma } n^2 - n \text{ con } n = 1, 2, 3, \dots, 9\}$

5. $B = \{\text{factores enteros de } 10\}$

6. $C = \{\text{números divisibles entre } 3\}$

En los ejercicios del 7 al 14, localice en la recta numérica 6 de los elementos del conjunto dado.

7. $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

8. $B = \left\{ \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

9. $C = \left\{ n + \frac{(-1)^n}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

10. $D = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

11. $E = \left\{ \frac{1-n}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

12. $F = \left\{ \frac{1-n}{n} (-1)^n : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

13. $G = \left\{ \frac{n}{n-1} : n = 2, 3, 4, \dots \right\}$

14. $H = \left\{ \frac{n}{1-n} : n = 2, 3, 4, \dots \right\}$

1.3 Determinación de conjuntos

Los conjuntos se determinan de dos formas:

1

Por *enumeración* o *extensión*. Consiste en enumerar o listar los elementos que forman al conjunto.

2

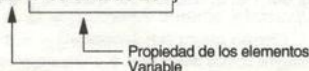
Por *descripción* o *comprensión*. Consiste en enunciar la propiedad o propiedades que distinguen a todos los elementos del conjunto, utilizando una variable.

Ejemplo 1

Considérese el conjunto A formado por las cifras del número 201, entonces:

a) Por enumeración: $A = \{0, 1, 2\}$

b) Por descripción: $A = \{x : x \text{ es cifra de } 201\}$



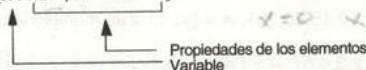
En casos como en el inciso b), los dos puntos ":" o una raya vertical "|" se leen "tal que" o "tales que" y $\{x : x \text{ es cifra de } 201\}$ se lee "conjunto formado por los elementos x tales que x es cifra de 201".

Ejemplo 2

Considérese el conjunto B de raíces de la ecuación $x^2 - 2x = 0$, entonces:

a) Por enumeración: $B = \{0, 2\}$

b) Por descripción: $B = \{x : x \in \mathbf{N}, x^2 - 2x = 0\}$



En casos como este se acostumbra escribir el conjunto así:

$$B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 - 2x = 0\}$$

Ejemplo 3

Considérese el conjunto C de números naturales impares. entonces

a) Por enumeración se usan puntos suspensivos así $C = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

b) Por descripción $C = \{x \in \mathbf{N} : x \text{ es impar}\}$

Ejercicios 1.3

En los ejercicios del 1 al 13, determine por enumeración cada conjunto.

1. $A = \{\text{múltiplos pares de 3 mayores que 0 y menores que 13}\}$

2. $B = \{1^n - (-1)^{-n} : n = 1, 2, 3, 4, 5\}$

3. $C = \{x : 2x^2 + 5x - 3 = 0\}$

4. $D = \{x \in \mathbf{Z} : 5 \text{ divide a } x\}$

5. $H = \left\{ \frac{(-1)^n - 1}{2} : n = 1, 2, 3, 4 \right\}$

6. $F = \{n^2 - 2n - 1 : n \in \mathbf{N}, n < 5\}$

7. $G = \left\{ x : \frac{x}{5} = \frac{5}{x} \right\}$

8. $M = \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} : n = 1, 2, 3 \right\}$

9. $E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

10. $L = \{n \in \mathbf{N} : 1 + 2n \leq 3^n\}$

11. $J = \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} : n = 1, 2, 3 \right\}$

12. $K = \left\{ \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 : n = 3, 4, 5 \right\}$

13. $I = \{n \in \mathbf{N} : 2^n > n\}$

Del 14 al 21, determine por descripción cada conjunto.

14. El conjunto A formado por las letras a, e, i, o, u.

15. El conjunto B de todos los cuadriláteros.

16. El conjunto C de fracciones equivalentes a la fracción $\frac{2}{3}$.

17. El conjunto D de números naturales pares.

18. El conjunto E de números naturales impares.

$$A = \{x : x \text{ son vocales}\}$$

$$D = \{x \in \mathbf{N} : x \text{ es par}\}$$

$$E = \{x \in \mathbf{N} : x \text{ sea } 1, 3, 5, 7, \dots\}$$

- 19 El conjunto F de raíces de la ecuación $x^3 - x^2 = 0$.
20. El conjunto G de números de la forma $\frac{1}{n}$ con n número natural.
21. El conjunto H de números de la forma $\frac{(-1)^n}{1 + \frac{1}{n}}$ con n número natural.

Del 22 al 26, tomando en cuenta a U determine A por enumeración.

22. $U = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$, $A = \{x \in U : x \text{ es múltiplo impar de } 5\}$
23. $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{x \in U : x \text{ es cifra de la parte decimal de } \frac{5}{11}\}$
24. $U = \{2, 3, 4, 5\}$, $A = \left\{\frac{n}{n-1} : n \in U\right\}$
25. $U = \{2, 3, 4, 5\}$, $A = \left\{\frac{n^2 - n}{n-1} : n \in U\right\}$
26. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{x \in U : x^2 - x - 6 = 0\}$

1.4 Conjunto vacío

Definición

Un conjunto que carece de elementos se llama *conjunto vacío* o *conjunto nulo*.

El conjunto vacío se simboliza así " $\emptyset$ ".

Ejemplo 1

El conjunto $A = \{x : x \text{ es divisor par de } 5\}$ es vacío, porque 5 no tiene divisores pares.

Ejemplo 2

El conjunto $B = \{x : x \text{ es múltiplo impar de } 2\}$ es vacío, porque ningún múltiplo de 2 es impar.

Ejemplo 3

El conjunto $C = \{x \in \mathbf{N} : x^2 + 5x + 6 = 0\}$ es vacío, porque $x^2 + 5x + 6 = 0$ tiene a -2 y a -3 como raíces y no son números naturales.

Ejercicios 1.4

En cada ejercicio determine si es o no es vacío el conjunto dado.

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $A = \{x \in \mathbf{Z} : 2x - 3 = 0\}$ | 2. $B = \{x \in \mathbf{Q} : 2x - 3 = 0\}$ | 3. $C = \{x \in \mathbf{R} : x^2 + 2 = 0\}$ |
| 4. $D = \{x \in \mathbf{N} : x - 3 < 0\}$ | 5. $E = \{x \in \mathbf{R} : x^2 < 0\}$ | 6. $F = \left\{\frac{x}{x-1} : x = 1\right\}$ |
| 7. $G = \{x \in \mathbf{N} : x + 2 = 0\}$ | 8. $H = \{x \in \mathbf{R} : x + 3 = 0\}$ | 9. $I = \{x \in \mathbf{N} : x^0 \neq 1\}$ |

1.5 Conjunto universal

Un conjunto que contiene todos los elementos de los conjuntos que intervienen en una discusión se llama *conjunto universal* o *universo* y se denota con la letra U .

Ejemplo 1

Si $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{5, 7\}$, $D = \{0, 1, 3\}$ y $E = \{3, 5, 7, 2\}$; entonces el mínimo conjunto universal que puede considerarse para estos conjuntos es $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ porque U tiene los elementos de los conjuntos A, B, C, D y E .

Ejemplo 2

Si el conjunto universal U es el conjunto de los números reales y $A = \{x \in U : x^2 - 2x = 0\}$, entonces $A = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

¿Cuáles son los elementos de A si $U = Q = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in Z, b \neq 0\right\}$?

En la determinación de un conjunto es costumbre especificar el universo al que pertenecen sus elementos; por ejemplo en

$$A = \{x \in R : x^2 - 2x = 0\}$$

se sobreentiende que el conjunto universal es $U = R$

Ejercicios 1.5

Determine por enumeración cada conjunto.

1. $A = \{x \in N : -3 < x < 3\}$

2. $B = \{x \in Z : -3 < x < 3\}$

3. $C = \{x \in N : x^2 + 2x - 3 = 0\}$

4. $D = \{x \in Z : x^2 + 2x - 3 = 0\}$

5. $E = \{x \in Q : x^2 - 2 = 0\}$

6. $F = \{x \in R : x^2 - 2 = 0\}$

7. $G = \{x \in N : x^2 < 10\}$

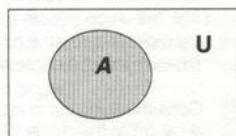
8. $H = \{x \in Z : x^2 < 10\}$

9. $I = \{x \in R : x - x = 1\}$

10. $J = \{x \in R : a < x < a\}$

1.6 Diagramas de Venn

La siguiente ilustración es un diagrama de Venn.

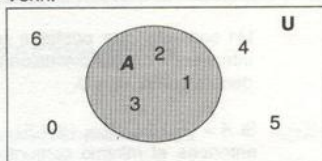


Aquí el rectángulo representa al conjunto universal y la región sombreada representa un conjunto A contenido en dicho conjunto universal.

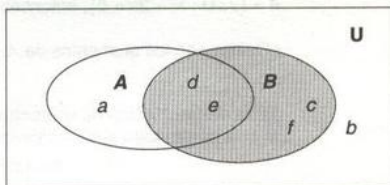
Los diagramas de Venn se usan para representar gráficamente a un conjunto o más, junto con el conjunto universal que los contiene.

Ejemplo 1

Si $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $A = \{1, 2, 3\}$, representar ambos conjuntos en un diagrama de Venn.

Solución**Ejemplo 2**

Si $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a, d, e\}$ y $B = \{c, d, e, f\}$, representar los tres conjuntos en un diagrama de Venn.

Solución**Ejercicios 1.6**

En cada ejercicio, represente en un diagrama de Venn los conjuntos dados.

- $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{x \in U : 2 \text{ divide a } x\}$
- $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{x \in U : x \text{ es múltiplo de } 3\}$, $B = \{x \in U : x \text{ divide a } 6\}$
- $U = \{o, p, q, r, s, t, u, v\}$, $A = \{x \in U : x \text{ es vocal}\}$, $B = \{x \in U : x \text{ es consonante}\}$

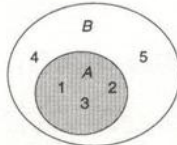
1.7**Subconjuntos****Definición**

Un conjunto A es *subconjunto* de un conjunto B si todo elemento de A es elemento de B .

La relación "es subconjunto de" se denota con el símbolo " $\subseteq$ " el cual se lee "es subconjunto de", "está contenido en" o "contenido en". Por ejemplo $A \subseteq B$ se lee " A es subconjunto de B ", " A está contenido en B " o brevemente " A contenido en B ".

Ejemplo 1

Considérense los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Entonces $A \subseteq B$ porque todo elemento de A es elemento de B .



En el ejemplo, el conjunto B tiene al menos un elemento que no pertenece al conjunto A siendo éste, subconjunto del conjunto B ; en tal

Notas

1

caso se dice que A es *subconjunto propio* del conjunto B lo cual se denota como $A \subset B$

2

El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto A ; o sea $\emptyset \subseteq A$

3

Todo conjunto A es subconjunto de sí mismo, es decir $A \subseteq A$

En el ejemplo anterior el conjunto B no es subconjunto de A porque existe $4 \in B$ tal que $4 \notin A$. Este hecho se expresa así $B \not\subseteq A$ y se lee " B no está contenido en A " o " B no es subconjunto de A ".

Ejercicios 1.7

1. Encuentre todos los subconjuntos de $M = \{1, 2, 3\}$.

En los ejercicios del 2 al 13, considere los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ divide a } 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es factor de } 16\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} : 12 \text{ es múltiplo de } x\}$ y $D = \{x \in \mathbb{N} : x^2 - 5x + 6 = 0\}$ para relacionarlos con los símbolos $\subset$ o $\not\subset$ según sea el caso.

2. $A \quad \square \quad B$

3. $B \quad \square \quad C$

4. $C \quad \square \quad A$

5. $A \quad \square \quad D$

6. $A \quad \square \quad C$

7. $B \quad \square \quad D$

8. $C \quad \square \quad B$

9. $C \quad \square \quad A$

10. $B \quad \square \quad D$

11. $D \quad \square \quad A$

12. $D \quad \square \quad C$

13. $C \quad \square \quad D$

Del 14 al 18, relacione los conjuntos dados, con los símbolos $\subset$ o $\not\subset$ y represente la relación en un diagrama de Venn.

14. $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

15. $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ divide a } 6\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ divide a } 12\}$

16. $A = \{a, b, c, d, \}$, y $B = \{a, b, c, e, f\}$

17. $A = \{n \in \mathbb{N} : n = \sqrt{x^2}, x \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} : x = n^2, n \in \mathbb{N}\}$

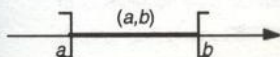
18. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$

1.8

Intervalos

De mucha importancia en el cálculo son los subconjuntos del conjunto de números reales llamados *intervalos*. Estos subconjuntos se definen en términos de la relación de orden " $\leq$ " léase "menor o igual que" de los números reales como sigue

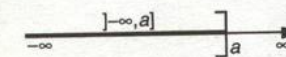
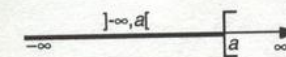
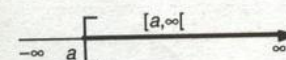
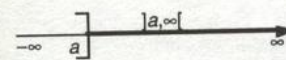
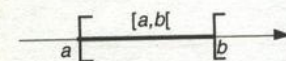
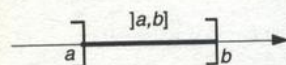
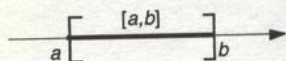
Definición



Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$, entonces:

- El *intervalo abierto* determinado por a y b se denota (a, b) o $]a, b[$ y se define como

$$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$



- El *intervalo cerrado* determinado por a y b se denota $[a, b]$ y se define como

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

- Los *intervalos semi-abiertos* o *semi-cerrados* determinados por a y b se denotan como (a, b) o $]a, b]$, $[a, b)$ o $[a, b[$ y se definen así

$$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

- Los *intervalos infinitos* se denotan como (a, ∞) o $]a, \infty[$, $[a, \infty)$ o $[a, \infty[$, $(-\infty, a)$ o $] -\infty, a[$, $(-\infty, a]$ o $] -\infty, a]$, $(-\infty, \infty)$ o $] -\infty, \infty[$ y se definen así

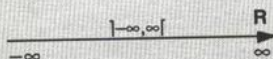
$$(a, \infty) =]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

$$[a, \infty) = [a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

$$(-\infty, a) =] -\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$(-\infty, a] =] -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

$$(-\infty, \infty) =] -\infty, \infty[= \mathbb{R}$$



Notas

1

Convencionalmente los conjuntos $\emptyset$ y $\{a\}$ con $a \in \mathbb{R}$ se aceptan como intervalos y se les conoce como *intervalos triviales*; esto es,
 $\emptyset =]a, a[$ y $\{a\} = [a, a]$

2

" ∞ " y " $-\infty$ " son simplemente símbolos, no son números reales

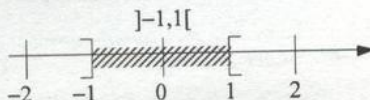
3

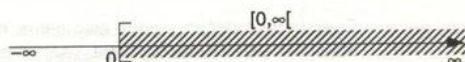
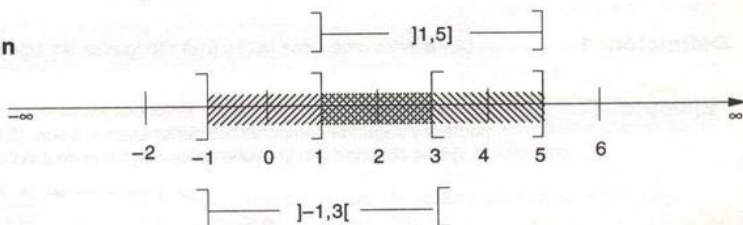
En la práctica los intervalos se representan gráficamente con rayas inclinadas a lo largo del segmento o de la semirrecta o recta que los determina, sin que esto quiera decir que hay huecos en ellos. De hecho todo intervalo carece de huecos excepto posiblemente en sus extremos.

Ejemplo 1

Representar gráficamente el intervalo $] -1, 1[$

Solución



Ejemplo 2Representar gráficamente el intervalo $[0, \infty[$ **Solución****Ejemplo 3**Representar gráficamente los intervalos $] -1, 3[$ y $] 1, 5[$ en una misma copia de la recta numérica.**Solución**

Nótese que para representar dos intervalos en la misma recta numérica se usan rayas con distinta inclinación. En este caso $] 1, 5[$ = y $] -1, 3[$ =

Ejercicios 1.8

En los ejercicios del 1 al 12, represente gráficamente cada intervalo.

- | | | | | | |
|-------------------------|------------------|------------------------------|-------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| 1. $] -3, 4[$ | 2. $] 0, 1[$ | 3. $] -1, \infty[$ | 4. $] -\infty, 0[$ | 5. $] -\infty, \frac{1}{2}[$ | 6. $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ |
| 7. $] -\frac{1}{3}, 0[$ | 8. $] 2.5, 4.7[$ | 9. $] \frac{27}{5}, \infty[$ | 10. $] 0, \frac{1}{2}[$ | 11. $] -\infty, \sqrt{10}[$ | 12. $] -2.5, 1[$ |

Del 13 al 20, represente gráficamente cada pareja de intervalos.

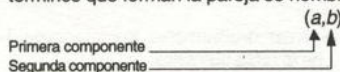
- | | | | |
|--------------------------------------|--|---|--|
| 13. $] 2.5, 5[$ y $] -1, 0[$ | 14. $] -\infty, 0[$ y $] -4, 3[$ | 15. $] -\infty, 0[$ y $] 0, \infty[$ | 16. $] -\frac{1}{5}, \infty[$ y $] -1, 3[$ |
| 17. $] -\frac{7}{3}, 3[$ y $] 3, 6[$ | 18. $] -\sqrt{2}, 0[$ y $] 0, \sqrt{2}[$ | 19. $] -3, -\frac{1}{2}[$ y $] \frac{1}{2}, 3[$ | 20. $] -\infty, \frac{5}{2}[$ y $] \frac{5}{2}, \infty[$ |

21. Considere los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 < x < 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < x < 5\}$, $C = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 5\}$ y $D = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 5\}$. Entonces:

- ¿ A y B son intervalos?
- ¿Cómo se relacionan con el símbolo $\subseteq$ los conjuntos A , B , C y D ?
- ¿Cuáles de esos conjuntos son intervalos?
- ¿Por qué C no es un intervalo?

1.9 Producto cartesiano

Cuando se ordenan ciertos elementos tomándolos de dos en dos, se obtienen parejas de la forma (a,b) llamadas *parejas ordenadas*. Los términos que forman la pareja se nombran así

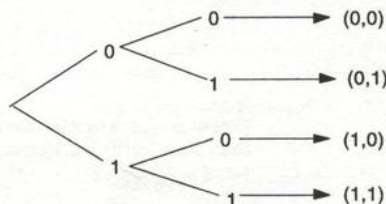


Definición 1

Dos parejas ordenadas (a,b) y (c,d) son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$

Ejemplo 1

Considérese el conjunto $A = \{0,1\}$. Entonces las parejas ordenadas cuya primera y segunda componentes pertenecen a A son: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y $(1,1)$ y se obtienen con la ayuda de un *diagrama de árbol* así



¿Son iguales las parejas $(0,1)$ y $(1,0)$?

Definición 2

El *producto cartesiano* de los conjuntos A y B denotado por $A \times B$ se define así

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

Ejemplo 2

Si $A = \{a,b\}$ y $B = \{c,d\}$, determinar $A \times B$ y $B \times A$

Solución

$$A \times B = \{(a,c), (a,d), (b,c), (b,d)\}$$

$$B \times A = \{(c,a), (c,b), (d,a), (d,b)\}$$

¿Son iguales $A \times B$ y $B \times A$?

Representación gráfica de un producto cartesiano

Para representar gráficamente a un producto cartesiano $A \times B$, se hace lo siguiente:

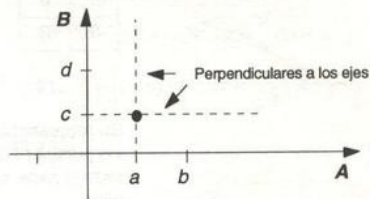
Se usan dos ejes perpendiculares así



Nótese que, los elementos del primer factor se localizan en el eje horizontal y los del segundo factor en el eje vertical.

2

Por cada una de las componentes de una pareja se traza una perpendicular al eje correspondiente.



La intersección de las perpendiculares trazadas determina un punto que es la representación gráfica de la pareja en cuestión.

3

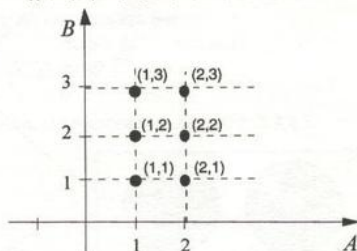
Se hace lo mismo con las demás parejas que forman el producto.

Ejemplo 3

Representar gráficamente el producto

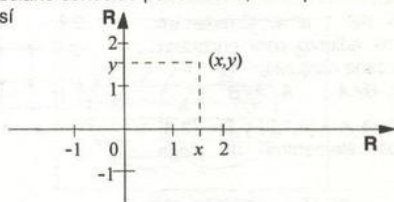
$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$$

Solución



Ejemplo 4

El plano cartesiano conocido por el lector, es el producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ y se representa así



De interés especial en los cursos de cálculo son los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ como los que se describen a continuación.

Ejemplo 5

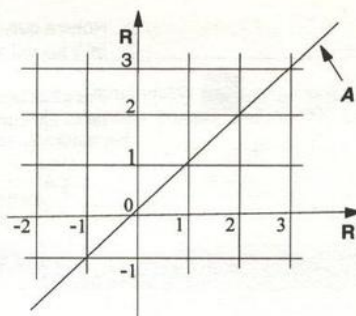
Graficar el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x\}$

Solución

Se grafica la ecuación $y = x$

x	y
0	0
3	3

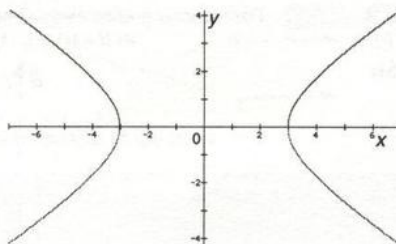
Se representan gráficamente los puntos $(0,0)$ y $(3,3)$ y se traza la recta que pasa por ellos.

**Ejemplo 6**

Graficar el conjunto $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \right\}$

Solución

Su gráfica es la hipérbola que sigue

**Ejercicios 1.9**

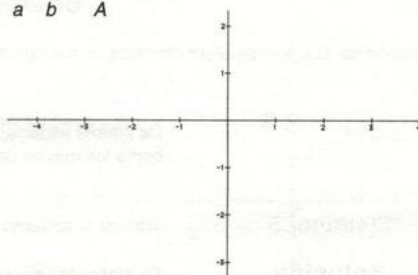
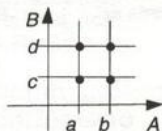
En los ejercicios del 1 al 4, tómese en cuenta el diagrama adjunto para encontrar los elementos de cada conjunto.

1. B 2. A 3. $B \times A$ 4. $A \times B$

Del 5 al 8, considere $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{2, 3\}$ para calcular los elementos de cada conjunto.

5. $A \times B$ 6. $B \times A$ 7. A^2 8. B^2

9. Localice en el plano cartesiano adjunto, los puntos $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(-\sqrt{2}, 1)$, $\left(-\frac{11}{3}, 1\right)$, $\left(\frac{17}{7}, -3\right)$, $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$ y $\left(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{2}\right)$



Del 10 al 23, represente gráficamente cada conjunto.

10. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$ 14. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\}$ 18. $I = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-2, 4] : y = 2 - x\}$
 11. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$ 15. $F =]0, 1[\times]-1, 2[$ 19. $J = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times]-1, 1[: y = x\}$
 12. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3\}$ 16. $G = \mathbb{R} \times]-1, 0[$ 20. $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{2}{3}\sqrt{4 - y^2}\}$
 13. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3\}$ 17. $H =]1, 2[\times]2, 3[$ 21. $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -\frac{2}{3}\sqrt{4 - y^2}\}$
 22. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$ 23. $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{9} - x^2 = 1\}$

1.10 Álgebra de conjuntos

Unión

Definición

La *unión* de dos conjuntos A y B es un conjunto formado por los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos A y B .

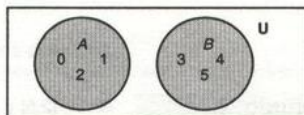
Simbólicamente la unión se expresa así:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

en donde $A \cup B$ se lee "A unión B".

Ejemplo 1

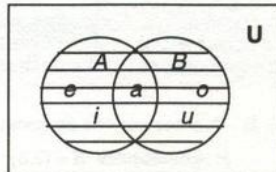
Si $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$, entonces $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$



$A \cup B$ es lo sombreado

Ejemplo 2

Si $A = \{a, e, i\}$ y $B = \{a, o, u\}$, entonces $A \cup B = \{a, e, i, o, u\}$



$A \cup B$ es lo rayado

Ejemplo 3

Si $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x\}$, entonces

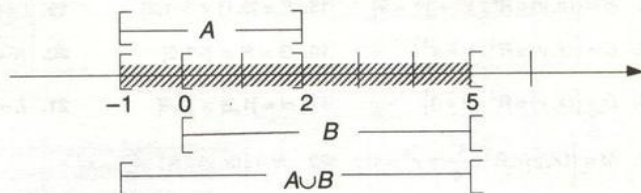
$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : x < 2 \text{ o } 3 \leq x\} = \{x \in \mathbb{R} : x \notin [2, 3]\}$$



Ejemplo 4**Solución**

Si $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 5\}$, calcular $A \cup B$

Como $A = [-1, 2]$ y $B = [0, 5[$; entonces, se calcula $A \cup B$ gráficamente así



Así que $A \cup B = [-1, 5[$

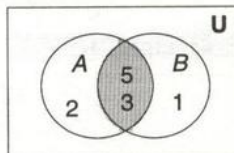
Intersección**Definición**

La *intersección* de dos conjuntos A y B es un conjunto formado por los elementos que pertenecen tanto a A como a B .

En símbolos la intersección se expresa así $A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$, en donde $A \cap B$ se lee "A intersección B".

Ejemplo 5

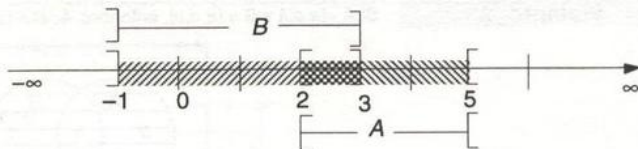
Si $A = \{2, 3, 5\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$, entonces $A \cap B = \{3, 5\}$.



$A \cap B$ es lo sombreado

Ejemplo 6

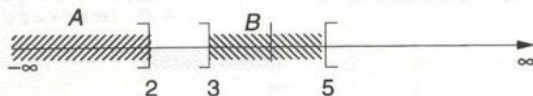
Si $A = [2, 5[$ y $B =]-1, 3]$, calcular $A \cap B$

Solución

Entonces $A \cap B = [2, 3]$

Ejemplo 7

Si $A =]-\infty, 2]$ y $B = [3, 5[$, calcular $A \cap B$.

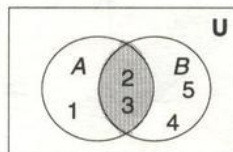
Solución

Entonces $A \cap B = \emptyset$

Ejemplo 8**Solución**

Si $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 4\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 6\}$, calcular $A \cap B$.

Dado que $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5\}$,
entonces $A \cap B = \{2, 3\}$



Lo sombreado es $A \cap B$

Ejemplo 9**Solución**

Si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 4\}$ y
 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 2\}$;
calcular $A \cap B$

Se resuelve el sistema: $y = x^2 - 4$
 $y = x + 2$

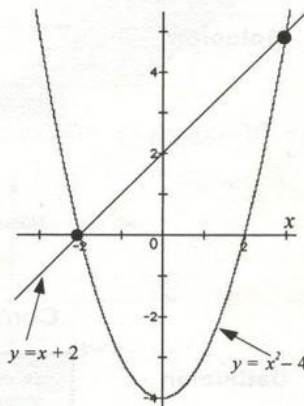
Observe:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ o } x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ o } x = -2 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en cualquiera de las ecuaciones se obtienen los puntos de $A \cap B$

$$\begin{aligned} x = 3 &\Rightarrow y = x + 2 = 3 + 2 = 5 \\ x = -2 &\Rightarrow y = x + 2 = -2 + 2 = 0 \end{aligned}$$

Así que $A \cap B = \{(3, 5), (-2, 0)\}$



x	y	(x, y)
3	5	(3, 5)
-2	0	(-2, 0)

Nota: El símbolo " $\Leftrightarrow$ " en este caso debe leerse "es equivalente con" y el símbolo " $\Rightarrow$ " debe leerse "implica que"

Diferencia o complemento relativo**Definición**

La *diferencia* de dos conjuntos A y B denotada como $A - B$ y llamada también el *complemento relativo* de B respecto a A , es el conjunto de elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B

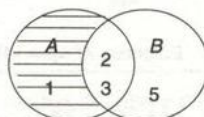
En símbolos la diferencia se expresa como $A - B$, se define así

$$A - B = \{x \in A : x \notin B\}$$

y se lee "A menos B".

Ejemplo 10

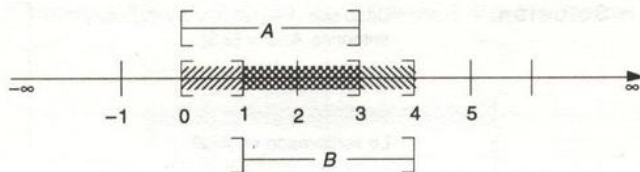
Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 5\}$, entonces $A - B = \{1\}$



$A - B$ es lo rayado

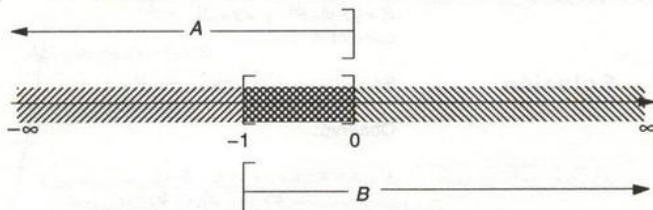
Ejemplo 11

Si $A = [0, 3]$ y $B =]1, 4]$, entonces $A - B = [0, 1]$ y $B - A =]3, 4]$

**Ejemplo 12**

Si $A =]-\infty, 0]$ y $B = [-1, \infty[$, calcular $A - B$ y $B - A$,

Solución



Nótese que $A - B =]-\infty, -1[$ y $B - A =]0, \infty[$

Complemento absoluto**Definición**

El *complemento absoluto* o simplemente *complemento* de un conjunto A es el conjunto de elementos del conjunto universal U que no pertenecen a A

El complemento de A se denota A^c o A' y se define como

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}$$

Nótese que $A^c = U - A$

Ejemplo 13

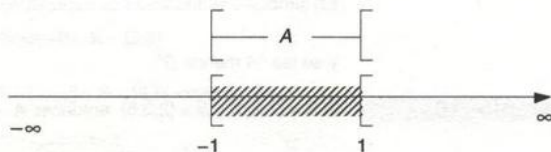
Si $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$, entonces $U = \mathbb{N}$ y $A^c = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es impar}\}$

Ejemplo 14

Si $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 1\}$, calcular A^c

Solución

Nótese que $A = [-1, 1]$ y $U = \mathbb{R}$. Observe:



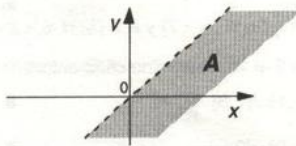
Entonces $A^c =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$

Ejemplo 15

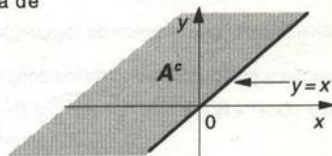
Si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$, calcular A^c

Solución

La representación gráfica de A es lo sombreado en la figura adjunta.

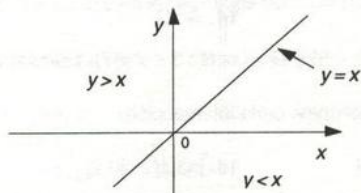


Entonces la representación gráfica de $A^c = \mathbb{R}^2 - A$ es así:



A^c es lo sombreado y la recta $y = x$
Así que $A^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}$

Nótese que: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$



Tomando en cuenta esto se tiene que:

Cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, satisfacen exactamente una de las siguientes relaciones

$$y > x, y = x \text{ o } y < x$$

Esta propiedad que tienen los números reales se llama *propiedad de tricotomía*.

Ejemplo 16**Solución**

Si $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{3+x} > 2 \right\}$, calcular A^c

Por tricotomía se tiene que: $\frac{x-1}{3+x} > 2$ o $\frac{x-1}{3+x} \leq 2$

Así que: $A^c = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{3+x} \leq 2 \right\}$

En el siguiente capítulo se determinarán con todo detalle los elementos de conjuntos como los del ejemplo anterior; por ahora sólo se dejan indicados.

Ejercicios 1.10

En los ejercicios del 1 al 3, considere los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e\}$ y $C = \{a, d\}$ para calcular lo que se indica.

1. $A \cup B$

2. $A \cup C$

3. $B \cup C$

4. Si $A = \{x \in \mathbf{N} : x < 7\}$ y $B = \{x \in \mathbf{N} : 5 < x < 11\}$, calcule $A \cup B$

Del 5 al 10, determine cada unión.

5. $]-2, 1] \cup]1, 3[$

6. $[-3, 0] \cup [0, 3] \cup [1, 4]$

7. $]0, 1[\cup [1, 2] \cup]2, 3[$

8. $]-\infty, 0] \cup]0, \infty[$

9. $]-\infty, -\frac{3}{4}] \cup]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[\cup [\frac{1}{4}, 1[$

10. $]-\infty, 0] \cup]1, \infty[$

11. Calcule y grafique la unión de los conjuntos $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}$ y $B = \{0, 1\}$

12. Calcule y grafique la unión de los conjuntos

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = -\frac{3}{2}\sqrt{4+y^2} \right\} \text{ y } B = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = \frac{3}{2}\sqrt{4+y^2} \right\}$$

En los ejercicios 13, 14 y 15, considere los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1\}$ y $C = \{0, 1, 2\}$ para calcular la intersección dada.

13. $A \cap B$

14. $A \cap C$

15. $C \cap B$

16. Si $A = \{x \in \mathbf{N} : x < 5\}$ y $B = \{x \in \mathbf{N} : 3 \leq x < 7\}$, calcular $A \cap B$

Del 17 al 22, determine cada intersección.

17. $]-\infty, 0] \cap]-2, \infty[$

18. $]-3, 1[\cap]0, 2]$

19. $]-\infty, -1[\cap [1, \infty[$

20. $]-\frac{3}{4}, 1[\cap]-1, \frac{1}{2}[\cap]0, 1[$

21. $]-\frac{4}{3}, \infty[\cap (]-5, -2[\cup]-1, 4[)$

22. $\left(\left[\frac{4}{5}, \infty[\cup \left] -\frac{3}{2}, 1 \right] \right) \cap \left] -\frac{9}{2}, \infty[\right)$

Del 23 al 29, calcule y grafique $A \cap B$

23. $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 2x\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 3\}$

24. $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x^2\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 2x\}$

25. $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = \sqrt{2x-6}\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = \sqrt{x}\}$

26. $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x - 2\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x + 1\}$

27. $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x^2\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = 2x\}$

28. $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x^2\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = \frac{1}{x}\}$

29. $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x^2 - 2x\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x\}$

30. Si $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{c, d, e, f, g\}$, calcule $A - B$ y $B - A$

Del 31 al 37, determine cada diferencia.

31. $]-\infty, -\frac{1}{2}[-]0, 1[$

32. $]-\infty, 2] -]-2, \infty[$

33. $]2, 3] - [3, 4]$

34. $]0, 1[-]0, 2[$

35. $]-\infty, \infty[- [0, 3]$ 36. $(]-1, 0[\cup [0, 2]) -]-3, 0[$ 37. $]-\infty, 4] - \left(]-1, 1] \cup \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \right)$

Del 38 al 53, considere $A =]-\infty, \frac{1}{2}[$, $B =]-3, 2[$ y $C = [2, 3]$, para calcular lo que se indica.

38. $A - B$ 39. $B - A$ 40. $A - C$ 41. $C - A$
 42. $(A - B) \cap (C - A)$ 43. $(A - B) \cup A$ 44. $(C - B) \cap A$ 45. $(A - B) - C$
 46. $(A \cup C) - (B \cup A)$ 47. $(A \cap C) - (B \cap A)$ 48. $(A \cap B) - C$ 49. $(A \cup B) - C$
 50. $(A - B) - C$ 51. $(A - C) \cup (B - C)$ 52. $(B - A) - (C - A)$ 53. $(A \cup B) - (A \cap B)$

54. Dé un ejemplo de conjuntos A , B y C para los que se cumpla que $(A - B) - C = A - (B - C)$

55. Dé un ejemplo de conjuntos A , B y C para los que no se cumpla que $(A - B) - C = A - (B - C)$.

56. Diga si $(A - B) \cup C = (A \cup C) - (B \cup C)$ es cierta para cualesquiera conjuntos A , B y C .

57. Si $A = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$, calcule A^c y $(A^c)^c$.

Considere los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 3\}$ para los ejercicios del 58 al 70.

58. A^c 59. B^c 60. $(A \cup B)^c$ 61. $(A \cap B)^c$ 62. $A^c \cap B^c$
 63. $(A \cup B)^c$ 64. $A^c \cup B^c$ 65. $A^c - B^c$ 66. $A - B$ 67. $A \cap B^c$

68. $\mathcal{L}(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$? 69. $\mathcal{L}(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$? 70. $\mathcal{L}A - B = A \cap B^c$?

71. Exprese el conjunto vacío en términos del complemento de un conjunto.

72. Exprese el conjunto universal en términos del complemento de un conjunto.

73. Si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + x > y\}$, calcule A^c

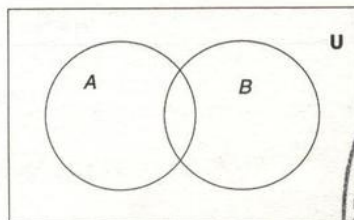
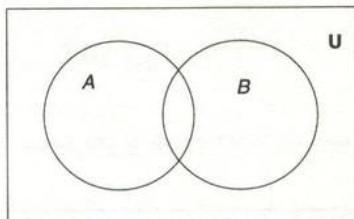
74. Si $A = \bigcup_{n=1}^3 \left[2n + \frac{(-1)^{2n}}{2n}, 2n + 1 + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \right]$, calcule A^c

75. Si $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right]$, ¿cuáles son los elementos de A ?

76. Si $A = \bigcap_{n=1}^{\infty}]-n, n[$, ¿cuáles son los elementos de A ?

77. Si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2\}$, calcule A^c

78. En uno de los diagramas adjuntos, sombree $A^c \cup B^c$ y en el otro sombree $(A \cup B)^c$. Compare los resultados. ¿Qué observa?



2 NÚMEROS REALES

2.0

Introducción

Calcular sin conocer las propiedades esenciales de los números reales, es como caminar por un sendero de penumbra en el que es fácil tropezar. Por ejemplo:

$$(1)^2 = (-1)^2 \Rightarrow 1 = \sqrt{(1)^2} = \sqrt{(-1)^2} = -1$$

Aquí se ha cometido un error, por el hecho de no haber aplicado la propiedad que sigue:

Si x es un número real, entonces

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Con esta propiedad se tiene que

$$\sqrt{(-1)^2} = |-1| = 1$$

En este capítulo, se estudiarán algunas de las más usadas propiedades de las operaciones y del valor absoluto de los números reales en el cálculo diferencial e integral.

2.1 Propiedades de las operaciones

El conjunto $\mathbf{R}$ de números reales satisface los siguientes axiomas de adición (+) y de multiplicación ($\cdot$).

Axiomas de adición y multiplicación

Axiomas:	Ejemplos:
Si a, b y c son números reales, entonces:	
Cerradura	
$A_1 \quad a + b \in \mathbf{R}$	$2 + \frac{3}{4} = \frac{8+3}{4} = \frac{11}{4} \in \mathbf{R}$
$M_1 \quad a \cdot b \in \mathbf{R}$	$(5)(-2) = -10 \in \mathbf{R}$
Conmutativa	
$A_2 \quad a + b = b + a$	$3 + (-2) = -2 + 3$
$M_2 \quad a \cdot b = b \cdot a$	$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$
Asociativa	
$A_3 \quad a + (b + c) = (a + b) + c$	$2 + (4 + 3) = (2 + 4) + 3$
$M_3 \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	$\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{4}{5}$
Elemento neutro	
A_4 Existe el 0 en $\mathbf{R}$ tal que $a + 0 = a = 0 + a$	$5 + 0 = 5, \quad 0 + 3 = 3$
M_4 Existe el 1 en $\mathbf{R}$ tal que $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$	$5 \cdot 1 = 5, \quad 1 \cdot 3 = 3$
Elemento inverso	
A_5 Para cada a en $\mathbf{R}$ existe $-a$ en $\mathbf{R}$ tal que $a + (-a) = 0 = (-a) + a$	$3 + (-3) = 0$
M_5 Para cada $a \neq 0$ en $\mathbf{R}$ existe $a^{-1} = \frac{1}{a}$ en $\mathbf{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$	$3 \cdot 3^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$
Distributiva	
$D \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	$3 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) = 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6}$

A partir de estos axiomas se demuestran todas las propiedades de las operaciones con números reales. Sin embargo, aquí sólo se demostrarán algunas de ellas.

Teorema 1

Si a es un número real, entonces $a \cdot 0 = 0$

Demostración

$$\begin{aligned}
 a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 & A_4 \\
 &= a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-a \cdot 0) & A_5 \\
 &= a \cdot (0 + 0) + (-a \cdot 0) & D \\
 &= a \cdot 0 + (-a \cdot 0) & A_4 \\
 &= 0 & A_5
 \end{aligned}$$

□

Teorema 2

Supóngase que a y b son números reales

1. Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$
2. Si $a = 0$ o $b = 0$, entonces $ab = 0$

Demostración

1. Si $b = 0$, no hay nada que demostrar pues en tal caso se cumple la condición que se desea demostrar.

Si $b \neq 0$, entonces por M_5 existe b^{-1} en $\mathbb{R}$ tal que $bb^{-1} = 1$. De donde

$$\begin{aligned}
 a &= a \cdot 1 & M_4 \\
 &= a \cdot (bb^{-1}) & M_5 \\
 &= (ab) \cdot b^{-1} & M_3 \\
 &= 0 \cdot b^{-1} & \text{Por hipótesis } ab = 0 \\
 &= b^{-1} \cdot 0 & M_2 \\
 &= 0 & \text{Teorema 1}
 \end{aligned}$$

2. Sigue inmediatamente del teorema 1.

□

Nota

En matemáticas para simplificar una proposición de la forma "si P entonces Q " se usa frecuentemente el símbolo " $\Rightarrow$ " el cual se lee "implica que". Por ejemplo

$$\text{"Si } ab = 0 \text{ entonces } a = 0 \text{ o } b = 0"$$

se simplifica así

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0$$

y se lee "Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$ " o brevemente así

" $ab = 0$ implica que $a = 0$ o $b = 0$ ".

El recíproco de una proposición de la forma $P \Rightarrow Q$ es la proposición $Q \Rightarrow P$ y si ambas implicaciones son verdaderas, entonces las proposiciones P y Q son equivalentes, lo cual se denota $P \Leftrightarrow Q$. O sea, $P \Leftrightarrow Q$ significa que $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$. El símbolo " $\Leftrightarrow$ " se lee "si y sólo si" o bien "es equivalente con". Por ejemplo

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ o } b = 0$$

se lee "Si $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$ " o bien " $ab = 0$ es equivalente con $a = 0$ o $b = 0$ " e involucra dos implicaciones; a saber:

- $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0$
- $a = 0 \text{ o } b = 0 \Rightarrow ab = 0$

En lo sucesivo en este libro, las letras $a, b, c, \dots$ denotarán números reales.

Definición

$$1. a - b = a + (-b)$$

$$2. \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}, b \neq 0$$

Teorema 3

$$a^2 = b^2 \text{ si y sólo si } a = b \text{ o } a = -b$$

Demostración

$$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0$$

A_5

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b) = 0$$

D

$$\Leftrightarrow a+b=0 \text{ o } a-b=0$$

Teorema 2

$$\Leftrightarrow a=-b \text{ o } a=b$$

A_4 y A_5



Enseguida se aplicarán las propiedades en la resolución de ecuaciones.

Ejemplo 1

Resolver $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} = \frac{5}{4x}$

Solución

El mínimo común múltiplo de los denominadores es $4x^2$. Ello se denota así $\text{mcm}[x, 2x^2, 4x] = 4x^2$. Entonces

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} = \frac{5}{4x} \Leftrightarrow 4x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} \right) = 4x^2 \left(\frac{5}{4x} \right)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 \left(\frac{1}{x} \right) + 4x^2 \left(\frac{1}{2x^2} \right) = 4x^2 \left(\frac{5}{4x} \right)$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2 = 5x$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2 - 5x - 2 = 5x - 5x - 2$$

$$\Leftrightarrow -x = -2 \Leftrightarrow x = 2$$

Ejemplo 2Resolver $\frac{x}{2x+3} + 1 = 0$ **Solución**

$$\frac{x}{2x+3} + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x+3)\left(\frac{x}{2x+3} + 1\right) = (2x+3)(0)$$

$$\Leftrightarrow (2x+3)\left(\frac{x}{2x+3}\right) + (2x+3)(1) = (2x+3)(0)$$

$$\Leftrightarrow x + 2x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{3} \Leftrightarrow x = -1$$

Ejemplo 3Resolver $x^2 - 3x + 2 = 0$ **Solución**

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ o } x-2=0$$

Teorema 2

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ o } x=2$$

Ejemplo 4Resolver $x^2 - x - 1 = 0$ **Solución**

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ o } x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{Teorema 3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ o } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ejemplo 5Resolver el sistema $\begin{cases} xy = x - 1 \\ x^2 y = 2 \end{cases}$ **Solución**Se despeja y en cada ecuación.

$$xy = x - 1 \Leftrightarrow y = \frac{x-1}{x}$$

$$x^2 y = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{x^2}$$

Igualando las y , se tiene

$$\frac{x-1}{x} = \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{x-1}{x} \right) = x^2 \left(\frac{2}{x^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ o } x = -1$$

Se sustituye cada uno de estos valores en cualquiera de las expresiones que definen a y , así

$$\bullet \quad x = 2 \Rightarrow y = \frac{x-1}{x} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{array}$$

Soluciones del sistema

$$\bullet \quad x = -1 \Rightarrow y = \frac{x-1}{x} = \frac{-1-1}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 2 \end{array}$$

Ejercicios 2.1

Resuelva cada ecuación de los ejercicios del 1 al 20.

$$1. \quad \frac{1}{2x-1} - \frac{3}{x-2} = x+3$$

$$4. \quad \frac{4}{3x} - \frac{1}{x^2} = \frac{5}{6x}$$

$$7. \quad \frac{1}{4x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{3x} = \frac{13}{24}$$

$$10. \quad \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{5}{x+1}$$

$$13. \quad 6x^2 + x - 1 = 0$$

$$16. \quad \frac{2x+3}{x^3-1} = \frac{1}{x-1}$$

$$19. \quad \frac{x + \frac{1}{2x}}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{x-2}}} = 1$$

$$2. \quad \frac{1}{4x} - \frac{3}{x} = -\frac{9}{8}$$

$$5. \quad \frac{x-1}{1-2x} + \frac{4}{x+4} = 0$$

$$8. \quad \frac{3-x}{x+1} = \frac{1}{3}$$

$$11. \quad \frac{3}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{4}{x-1}$$

$$14. \quad \frac{2x+1}{x} = \frac{1}{x^2}$$

$$17. \quad \frac{x^2+3}{4-x^2} + \frac{x}{x-2} = \frac{x}{x+2}$$

$$20. \quad \frac{1 - \frac{2x+4}{x^2+5x+6}}{1 + \frac{4}{x^2+x-6}} = 1$$

$$3. \quad \frac{4x-1}{2} = \frac{1}{3} \left(6x - \frac{1}{x} \right)$$

$$6. \quad \frac{2-x}{1-x} = \frac{1}{2}$$

$$9. \quad \frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$12. \quad 2x^2 + 3x - 9 = 0$$

$$15. \quad \frac{x+2}{x-1} = \frac{3}{x^2-x}$$

$$18. \quad \frac{2x^2+1}{x^2-x-2} + \frac{x}{x+1} = \frac{x}{x-2}$$

Del 21 al 25, resuelva cada sistema.

21. $x - y = -1$
 $3x - y = 3$
22. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$
 $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2$
23. $xy - x + 2 = 0$
 $y^2x - 1 = 0$
24. $x^2 - 2x + y + 1 = 0$
 $x^2 - y - 1 = 0$
25. $x^3 - y - 1 = 0$
 $x + y^2 - 1 = 0$

26. Simplifique la expresión $\frac{1 - \frac{x^2 - x + 1}{1 - x^2}}{\left(\frac{2x - 1}{1 - x^2}\right)^2 \left(\frac{x^2 - x + 1}{1 - x^2}\right)} \cdot \frac{2x^2 - 2x + 2}{(1 - x^2)^2}$

Del 27 al 30, despeje la variable que se indica.

27. $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, q 28. $F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{d^2}$, d 29. $\frac{1}{a - t} + \frac{2}{a + t} = \frac{1}{t}$, t 30. $^{\circ}\text{C} = \left(\frac{5}{9}\right)(^{\circ}\text{F} + 32)$, $^{\circ}\text{F}$

Del 31 al 41, resuelva cada problema.

31. La carátula de un reloj tiene 60 marcas. La manecilla que marca las horas está en una posición A y el minutero en una posición B . Si las marcas en A y en B suman 31 y el minutero está 17 marcas a la derecha de la aguja horaria, ¿qué hora es en el reloj?
32. Las cuatro primeras cifras del teléfono de una señorita son 6501 y las tres restantes forman un número que debe usted calcular teniendo en cuenta que la suma de ellas es 16, las centenas son el triple de las decenas y éstas son la cuarta parte de las unidades. ¿Qué teléfono tiene la señorita?
33. Miguel se aleja de un poste de alumbrado público y se detiene exactamente cuando su distancia al poste es el doble de la longitud de su sombra. Si en ese momento la punta de su sombra dista 15 metros del poste, ¿qué tanto se alejó Miguel y cuánto mide su sombra en dicho momento?
34. Hay dos soluciones de ácido, una al 30% y la otra al 10%, ¿cuántos litros de cada una deben mezclarse para obtener 40 litros de solución de ácido al 20%?
35. Un atleta tarda 2 minutos y 40 segundos en llegar a la meta y otro tarda 3 minutos. Si la velocidad del más rápido es de $0.5 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ mayor que la del más lento, encuentre la velocidad de cada atleta.
36. Dos autos están en una misma ciudad. Uno de ellos sale de ella a las 12 horas a una velocidad de $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ y el otro sale en la misma dirección que el primero a las 12:30 horas y con una velocidad uniforme de $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿a qué distancia de la ciudad y a qué hora alcanza el segundo auto al primero?
37. Un joven llega tarde a una cita con su novia, la cual después de una prolongada espera decide marcharse. Al llegar el joven al lugar de la cita es informado que su impaciente novia abandonó el lugar a las 6:00 horas caminando hacia el Este del paraíso; por lo que, él a las 6:12 horas decide alcanzarla, cosa que logró después de recorrer 800 metros a una velocidad que superó a la de su novia en $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- a) ¿A qué velocidad recorrió cada uno los 800 metros?

b) ¿A qué hora la alcanzó?

38. Dos aviones vuelan a la misma altitud, uno al Norte con velocidad de $600 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ y el otro hacia el Este con velocidad de $800 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. El que va al Norte pasa una ciudad a las 10:00 horas y el que va al Este pasa la misma ciudad a las 10:30 horas. Si t es el tiempo en horas después de las 10:00 horas, entonces

a) Expresa la distancia d entre los aviones en términos del tiempo t .

b) ¿A qué hora la distancia entre los aviones es de 1000 kilómetros?

39. El numerador de una fracción positiva es 5. Si al numerador y al denominador de su recíproco se suman respectivamente 6 y 3 se obtiene una fracción equivalente a la fracción original. ¿Cuál es la fracción?
40. Ciento veinte esferas navideñas se colocan en cajas de igual tamaño. Si el número de esferas en cada caja supera en 2 al número de cajas, ¿cuántas cajas y cuántas esferas hay en cada una de las cajas?
41. Se desea construir una bodega de base cuadrada en la esquina de dos calles y en un terreno cuadrado de 15 metros por lado, de modo que quede un pasillo de igual ancho a ambas calles y con un área de 104 m^2 . ¿De qué ancho debe ser el pasillo?

Del 42 al 60, demuestre cada proposición usando las propiedades de adición y multiplicación como en el ejemplo que sigue tomando en cuenta que a , b y c son cualesquiera números reales.

Ejemplo: $-(-a) = a$

Demostración:

$$\begin{aligned} -(-a) &= -(-a) + 0 & \mathbf{A_4} \\ &= -(-a) + (-a) + a & \mathbf{A_5} \\ &= 0 + a & \mathbf{A_5} \\ &= a & \mathbf{A_4} \end{aligned}$$

42. $(-1)a = -a$

43. $a(-b) = -ab = (-a)b$

44. $(-a)(-b) = ab$

45. $1^{-1} = 1$

46. $(a^{-1})^{-1} = a, (a \neq 0)$

47. $-0 = 0$

48. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

49. $-(a+b) = -a-b$

50. $-(-1^{-1}) = 1$

51. $a+c = b+c \Rightarrow a=b$

52. $ac = bc, c \neq 0 \Rightarrow a=b$

53. $a^{-1} + b^{-1} = (a+b)(ab)^{-1}$

54. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

55. $-(a-b) = -a+b$

56. $(ab^{-1})^{-1} = a^{-1}b$

57. $(ab^{-1})(cd^{-1})^{-1} = (ad)(bc)^{-1}$

58. $(-1)^{-1} = -1$

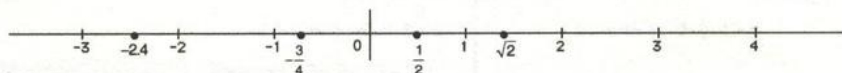
59. $a - (b-c) = a-b+c$

60. $(a+(-b)) - (c+(-d)) = (a+d) - (b+c)$

2.2

Desigualdades

Los números reales se representan por medio de puntos en la recta numérica como se muestra enseguida



Todo número que está a la derecha del cero (origen) es *positivo* y todo número que está a la izquierda del cero es *negativo*.

Los números reales tienen una relación de orden denotada por " $<$ " que se lee "es menor que" y se define así:

Definición

$a < b$ si y sólo si $b - a$ es positivo

Ejemplo 1

$3 < 5$ porque $5 - 3 = 2$ es positivo.

Nota

En el orden de los números reales se usan los símbolos $>$, $\geq$, y $\leq$. $a > b$ se lee " a es mayor que b " y significa lo mismo que $b < a$; $a \geq b$ se lee " a es mayor que b o a es igual a b " o brevemente se lee " a es mayor o igual que b ". $a \leq b$ se lee " a es menor o igual que b ".

Como $a - 0 = a$ para todo a , entonces

Para cada número a positivo se tiene que

$$a - 0 = a \text{ es positivo} \Leftrightarrow 0 < a \Leftrightarrow a > 0$$

O sea, todo número positivo es mayor que cero, y todo número mayor que cero es positivo.

La relación de orden " $<$ " de los números reales satisface los siguientes axiomas.

Axiomas de orden

Axiomas:	Ejemplos:
Si a, b y c son números reales, entonces: O₁ Tricotomía Una y sólo una de las siguientes relaciones se cumple $a < b$, $a = b$ o $b < a$	$3 < 5$, $3 = 3$, $2 < 3$

O₂ Transitiva $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$	$2 < 3$ y $3 < 5 \Rightarrow 2 < 5$
O₃ Aditiva $a < b \Rightarrow a + c < b + c$	$2 < 3 \Rightarrow 2 + 5 < 3 + 5$
O₄ Multiplicativa $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$	$2 < 3 \Rightarrow 2 \cdot 5 < 3 \cdot 5$

A partir de estos axiomas se demuestran todas las propiedades del orden. Sin embargo en este libro se demostrarán sólo algunas.

Teorema 1

$$a < b \text{ y } c < d \Rightarrow a + c < b + d$$

Demostración

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

O₃

$$c < d \Rightarrow b + c < b + d$$

O₃

$$\text{De donde: } a + c < b + d$$

O₂

□

Teorema 2

$$a < b \text{ y } c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

Demostración

$$\bullet \quad a < b \Rightarrow a - a < b - a$$

O₃

$$\Rightarrow 0 < b - a \text{ o sea } b - a > 0$$

A₅

$$\bullet \quad c < 0 \Rightarrow (b - a) \cdot c < (b - a) \cdot 0$$

O₄

$$\Rightarrow bc - ac < 0$$

D y teorema 1 sección 2.1

$$\Rightarrow bc - ac + ac < 0 + ac$$

O₃

$$\Rightarrow bc + 0 < 0 + ac$$

A₅

$$\Rightarrow bc < ac \text{ o sea } ac > bc$$

A₄

□

Enseguida se aplicarán las propiedades en la resolución de desigualdades.

Ejemplo 2

Resolver la desigualdad $2x - 1 < 1 + 5x$

Solución

$$2x - 1 < 1 + 5x \Leftrightarrow 2x - 1 + 1 - 5x < 1 + 5x + 1 - 5x$$

O₃

$$\Leftrightarrow -3x < 2 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)(-3x) > \left(-\frac{1}{3}\right)(2)$$

Teorema 2

$$\Leftrightarrow x > -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{2}{3}, \infty \right[$$

Ejemplo 3Resolver $-3 < 2x - 1 < 3$ **Solución**

Este tipo de desigualdades se resuelven aislando a x , para lo cual primero se elimina el -1 sumando su inverso aditivo a la desigualdad, luego se elimina el coeficiente 2 de x multiplicando toda la desigualdad por el inverso multiplicativo de 2. Observe:

$$-3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow -3 + 1 < 2x - 1 + 1 < 3 + 1$$

$$\Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)(-2) < \left(\frac{1}{2}\right)(2x) < \left(\frac{1}{2}\right)(4)$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 2 \Leftrightarrow x \in]-1, 2[$$

Ejemplo 4Resolver $2x - 1 < x + 3 \leq 1 - x$ **Solución**

Se resuelven por separado las dos desigualdades involucradas en la desigualdad propuesta.

$2x - 1 < x + 3$ $\Leftrightarrow 2x - x < 3 + 1$ $\Leftrightarrow x < 4 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 4[$	$x + 3 \leq 1 - x$ $\Leftrightarrow x + x \leq 1 - 3$ $\Leftrightarrow 2x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq \frac{-2}{2}$ $\Leftrightarrow x \leq -1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1]$
--	---

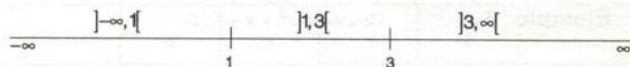
Entonces:

$$2x - 1 < x + 3 \leq 1 - x \Leftrightarrow x \in]-\infty, 4[\text{ y } x \in]-\infty, -1]$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 4[\cap]-\infty, -1] \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1]$$

Ejemplo 5Resolver $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ **Solución**

Se resuelve la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$. Las raíces de esta ecuación son 1 y 3. Los números 1 y 3 determinan tres intervalos abiertos en la recta numérica. Observe:



En cada uno de estos intervalos se toma un número de prueba, digamos $0 \in]-\infty, 1[$, $2 \in]1, 3[$ y $5 \in]3, \infty[$. Si alguno de ellos satisface la desigualdad propuesta, entonces el intervalo en el que está forma parte de la solución.

Número x de prueba	x	$x^2 - 4x + 3$	Relación con 0
$-\infty < x < 1$	0	3	$3 > 0$
$1 < x < 3$	2	-1	$-1 < 0$
$3 < x < \infty$	5	8	$8 > 0$

En la tabla se observa que $x = 2$ es el único valor de prueba que satisface la desigualdad $x^2 - 4x + 3 \leq 0$. Como además $2 \in]1, 3[$ entonces $]1, 3[$ es parte de la solución. Los extremos 1 y 3 de este intervalo también satisfacen la desigualdad $x^2 - 4x + 3 \leq 0$, entonces la solución completa es el intervalo $[1, 3]$.

Notas

1. Por cuestiones meramente didácticas como en la tabla anterior, con frecuencia se usarán indebidamente los símbolos ∞ y $-\infty$ en las desigualdades, debiendo quedar claro que ∞ y $-\infty$ no son números y que por lo tanto estrictamente no se les debe relacionar con algún número.

2. Sobre la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ que interviene en la resolución de una desigualdad de las formas

$$ax^2 + bx + c \leq 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \quad ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{o} \quad ax^2 + bx + c > 0:$$

se debe tener en cuenta que:

- Puede tener dos raíces reales e iguales (cuando $b^2 - 4ac = 0$); o sea, las dos raíces de la ecuación son un mismo valor r . En este caso los valores de prueba se toman en $]-\infty, r[$ y en $]r, \infty[$
- Puede tener dos raíces reales y distintas (cuando $b^2 - 4ac > 0$). Si las raíces son r_1 y r_2 se toma un valor de prueba en cada uno de los intervalos $]-\infty, r_1[$, $]r_1, r_2[$ y $]r_2, \infty[$
- Puede no tener raíces reales (cuando $b^2 - 4ac < 0$). En este caso se toma un único valor de prueba en el intervalo $]-\infty, \infty[$. Si el valor de prueba satisface la desigualdad, entonces la solución es el intervalo $]-\infty, \infty[$; si no, es el conjunto $\emptyset$ (vacío).

Ejemplo 6

Resolver $x^2 + x + 1 \geq 0$

Solución

En este caso el discriminante de la ecuación cuadrática $x^2 + x + 1 = 0$ es

$$b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$$

Entonces se analiza un sólo valor de prueba en $]-\infty, \infty[$. Observe:

Número x de prueba	x	$x^2 + x + 1$	Relación con 0
$-\infty < x < \infty$	0	1	$1 > 0$

Como el valor de prueba $x=0$ satisface la desigualdad $x^2 + x + 1 \geq 0$, entonces $]-\infty, \infty[$ es la solución.

Una técnica similar a la anterior se usa para resolver desigualdades como la que sigue.

Ejemplo 7

Resolver $\frac{x-2}{2x-7} > -1$

Solución

Se resuelven por separado las ecuaciones $\frac{x-2}{2x-7} = -1$ y $2x-7=0$

$2x-7=0$ $2x=7$ $x=\frac{7}{2}$	$\frac{x-2}{2x-7} = -1$ $x-2 = (-1)(2x-7)$ $x-2 = -2x+7$ $3x=9$ $x=\frac{9}{3}$ $x=3$
---------------------------------------	--

Los números 3 y $\frac{7}{2}$ determinan tres intervalos en la recta numérica, en los que se toman valores de prueba como se muestra en la tabla que sigue

Número x de prueba	x	$x-2$	$2x-7$	$\frac{x-2}{2x-7}$	Relación con -1
$-\infty < x < 3$	0	-2	-7	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7} > -1$
$3 < x < \frac{7}{2}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2} < -1$
$\frac{7}{2} < x < \infty$	4	2	1	2	$2 > -1$

En la tabla se observa que $x=0$ y $x=4$ son valores de prueba que satisfacen la desigualdad $\frac{x-2}{2x-7} > -1$ y como $0 \in]-\infty, 3[$ y $4 \in]\frac{7}{2}, \infty[$,

entonces la solución es $]-\infty, 3[\cup]\frac{7}{2}, \infty[$. En este caso no se cierran en 3 ni en $\frac{7}{2}$ los intervalos de la solución, porque 3 y $\frac{7}{2}$ no satisfacen la desigualdad.

Ejemplo 8

Resolver $\frac{x-1}{x-3} < \frac{1}{x+3}$

Solución

Se resuelven por separado las ecuaciones $\frac{x-1}{x-3} = \frac{1}{x+3}$, $x-3=0$ y $x+3=0$

$\frac{x-1}{x-3} = \frac{1}{x+3}$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+3) = (1)(x-3)$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = x - 3$ $\Leftrightarrow x^2 + x = 0$ $\Leftrightarrow x(x+1) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = -1$	$x - 3 = 0$ $\Leftrightarrow x = 3$	$x + 3 = 0$ $\Leftrightarrow x = -3$
---	-------------------------------------	--------------------------------------

Los números -3, -1, 0 y 3 determinan cinco intervalos en la recta numérica, en los que se toman valores de prueba como se muestra en la tabla que sigue

Número x de prueba	x	$\frac{x-1}{x-3}$	$\frac{1}{x+3}$	Relación entre las columnas 3 y 4
$-\infty < x < -3$	-4	$\frac{5}{7}$	-1	$\frac{5}{7} > -1$
$-3 < x < -1$	-2	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{3}{5} < 1$
$-1 < x < 0$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7} > \frac{2}{5}$
$0 < x < 3$	1	0	$\frac{1}{4}$	$0 < \frac{1}{4}$
$3 < x < \infty$	4	3	$\frac{1}{7}$	$3 > \frac{1}{7}$

De donde, la solución es $]-3, -1[\cup]0, 3[$

Ejercicios 2.2

1. Ordene de menor a mayor los números que siguen

$$-\sqrt{2}, \frac{1}{5}, 1, \frac{9}{10}, \frac{3}{8}, \sqrt{3}, 0, \sqrt{2}, \frac{2}{7}, \frac{3}{9}, 0.9, 0.099$$

En los ejercicios del 2 al 5, dé tres valores para x que satisfagan la desigualdad dada.

2. $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$

3. $-0.11 < x < -0.1$

4. $x^2 - x - 2 \leq 0$

5. $\frac{1}{x-1} < \frac{2}{1-x}$

Del 6 al 32, resuelva cada desigualdad.

6. $3x - 1 > 8$

7. $3 - 4x < 7$

8. $2x - 1 \leq 5x + 2$

9. $-4 \leq 1 - x < 4$

10. $0 \leq 2 - x < 3$

11. $-5 < 2x - 3 < 5$

12. $3x < 2x + 1 < 2x + 3$

13. $x - 1 < 3 - 2x < 1 + x$

14. $x < \frac{2x-1}{3} < 1 + x$

15. $3 + x < 3x - 2 < 1 - 2x$

16. $x^2 < 2x$

17. $x^2 \geq 9$

18. $x^2 \leq x + 2$

19. $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

20. $\frac{1-2x}{x+3} > 1$

21. $x^2 + x + 2 < 0$

22. $\frac{1-2x}{x+1} \leq 1 + 2x$

23. $\frac{x+1}{2-x} > x$

24. $-1 \leq \frac{x+3}{x} \leq 1$

25. $\frac{x-1}{1+x} < -2$

26. $\frac{1}{x-1} < \frac{2}{1-3x}$

27. $0 \leq \frac{1-x}{2x-1} < 3$

28. $\frac{x}{1-x} \geq \frac{2+x}{x}$

29. $\frac{2}{2x+1} \geq \frac{4}{1-x}$

30. $\frac{x^2+x-1}{x-1} > x+2$

31. $\frac{x^2-1}{x^2+2} < 3$

32. $\frac{x^2-4x}{x^2} < 1-x$

Del 33 al 39, demuestre cada proposición.

33. $a > b \geq 0 \Rightarrow a^2 > b^2$

34. $a \geq 0, b \geq 0 \text{ y } a^2 > b^2 \Rightarrow a > b$

35. $a^2 > b \geq 0 \Rightarrow a > \sqrt{b} \text{ o } a < -\sqrt{b}$

36. $b > 0 \text{ y } a^2 < b \Rightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

37. $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$

38. $1 \leq x \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{2x-1} \leq 1$

39. $-3 < x - 2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$

40. Encuentre el mínimo número M tal que $1 + 2x - 2x^2 \leq M$

41. Encuentre el máximo número m tal que $m \leq 3x^2 - 2x + 1$

2.3

Valor absoluto

Definición 1

El *valor absoluto* de un número a se denota $|a|$ y se define así

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1

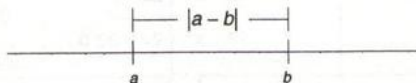
$$|2| = 2, \quad |-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}, \quad \left|-\frac{3}{4}\right| = -\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

Ejemplo 2

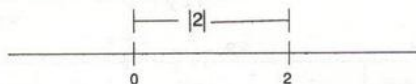
$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1) & \text{si } 2x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x & \text{si } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nota

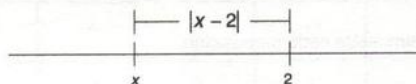
Geoméricamente el valor absoluto de la diferencia de dos números a y b denotado $|a-b|$ o $|b-a|$ es la distancia que hay entre ellos en la recta numérica.



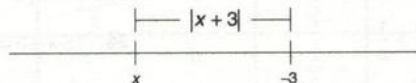
- $|2| = |2-0|$ es la distancia entre los puntos que corresponden al 2 y al origen (el cero) en la recta numérica.



- $|x-2|$ denota la distancia de x a 2 en la recta numérica.



- $|x+3| = |x-(-3)|$ es la distancia de x a -3 en la recta numérica.



- $|2x-1| = \left|2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right| = 2\left|x-\frac{1}{2}\right|$ es el doble de la distancia de x a $\frac{1}{2}$ o la distancia de $2x$ a 1.

Teorema 1

1. $|a| \geq 0$

2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Demostración

1. Hay dos casos:

- $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \geq 0$
- $a < 0 \Rightarrow |a| = -a > 0$

2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ o $-a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ o $a = -0 = 0$

□

Teorema 2

1. $|a| = |-a|$

2. $a \leq |a|$ y $-a \leq |a|$

Demostración

1. Hay dos casos:

- $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a = -(-a) = |-a|$
- $a < 0 \Rightarrow |a| = -a = |-a|$

2. Hay dos casos en los cuales se aplica el teorema anterior.

- $a \geq 0 \Rightarrow a = |a|$ y $-a \leq 0 \leq |a|$
- $a < 0 \Rightarrow a < 0 \leq |a|$ y $-a = |-a| = |a|$

□

Definición 2Supóngase que $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Entonces:

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Ejemplo 3

$$\sqrt{4} = 2 \text{ porque } 2^2 = 4$$

$$\sqrt{0} = 0 \text{ porque } 0^2 = 0$$

Teorema 3

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

DemostraciónSupóngase que $\sqrt{a^2} = b \geq 0$. Entonces por el teorema 3 de la sección 2.1 se tiene

$$\sqrt{a^2} = b \Leftrightarrow b^2 = a^2 \Leftrightarrow b = a \text{ o } b = -a \Leftrightarrow b = |a|$$

□

Teorema 4

1. $|ab| = |a||b|$

2. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, ($b \neq 0$)

3. $|a^n| = |a|^n$, n entero

Demostración

$$1. |ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = |a||b|$$

2. y 3. se dejan para que el lector las demuestre en forma similar. $\square$

Teorema 5

La desigualdad del triángulo.

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Demostración

Por el teorema 2 de esta sección se tiene lo que sigue

- $a \leq |a|$ y $b \leq |b| \Rightarrow a + b \leq |a| + |b|$
- $-a \leq |a|$ y $-b \leq |b| \Rightarrow -(a + b) \leq |a| + |b|$

De donde $|a + b| \leq |a| + |b|$ $\square$

Enseguida se demuestra un teorema que será usado para resolver igualdades o desigualdades que involucren valores absolutos.

Teorema 6

1. Si $b \geq 0$, entonces $|a| = b \Leftrightarrow a = b$ o $a = -b$

2. Si $b > 0$, entonces $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

3. $|a| > b \Leftrightarrow a > b$ o $a < -b$

Demostración

1. De la definición de valor absoluto se tiene que

$$|a| = b \Leftrightarrow a = |a| = b \text{ o } -a = |a| = b \Leftrightarrow a = b \text{ o } a = -b$$

2. Por el teorema 2 de esta sección se tiene

$$|a| < b \Leftrightarrow a \leq |a| < b \text{ y } -a \leq |a| < b \Leftrightarrow a < b \text{ y } a > -b \Leftrightarrow -b < a < b$$

3. $|a| > b \Leftrightarrow a > b$ o $-a > b \Leftrightarrow a > b$ o $a < -b$. $\square$

Ejemplo 4

Resolver $|3x + 2| = 2$

Solución

Por la parte 1 del teorema 6

$$|3x + 2| = 2 \Leftrightarrow 3x + 2 = 2 \text{ o } 3x + 2 = -2$$

$$\Leftrightarrow 3x = 0 \text{ o } 3x = -4 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = -\frac{4}{3}$$

Ejemplo 5

Resolver $|2x + 1| < 4$

Solución

Por la parte 2 del teorema 6 se tiene

$$|2x + 1| < 4 \Leftrightarrow -4 < 2x + 1 < 4 \Leftrightarrow -4 - 1 < 2x + 1 - 1 < 4 - 1$$

$$\Leftrightarrow -5 < 2x < 3 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right[$$

Ejemplo 6Resolver $|1-2x| < x+2$ **Método 1**

Usando la parte 2 del teorema 6.

$$|1-2x| < x+2 \Leftrightarrow -x-2 < 1-2x < x+2 \text{ y } x+2 > 0$$

$$\Leftrightarrow -x-2 < 1-2x \text{ y } 1-2x < x+2 \text{ y } x+2 > 0$$

$$\Leftrightarrow -x+2x < 1+2 \text{ y } -2x-x < 2-1 \text{ y } x+2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 3 \text{ y } x < -\frac{1}{3} \text{ y } x > -2$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 3[\text{ y } x \in \left] -\frac{1}{3}, \infty[\text{ y } x \in]-2, \infty[$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 3[\cap \left] -\frac{1}{3}, \infty[\cap]-2, \infty[\Leftrightarrow x \in \left] -\frac{1}{3}, 3[$$

Método 2Se resuelve la ecuación $|1-2x| = x+2$ como sigue

$$|1-2x| = x+2 \Leftrightarrow 1-2x = x+2 \text{ o } 1-2x = -x-2$$

$$\Leftrightarrow -3x = 1 \text{ o } -x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ o } x = 3$$

Los números $-\frac{1}{3}$ y 3 determinan tres intervalos en la recta numérica, en los que se toman valores de prueba como sigue

Número x de prueba	x	$ 1-2x $	$x+2$	Relación entre las columnas 3 y 4
$-\infty < x < -\frac{1}{3}$	-1	3	1	$3 > 1$
$-\frac{1}{3} < x < 3$	0	1	2	$1 < 2$
$3 < x < \infty$	4	7	6	$7 > 6$

De donde, el intervalo $\left] -\frac{1}{3}, 3[$ es parte de la solución. Pero $-\frac{1}{3}$ y 3 no satisfacen la desigualdad $|1-2x| < x+2$, entonces la solución es $\left] -\frac{1}{3}, 3[$

Ejemplo 7Resolver $\left| \frac{2x-1}{x+1} \right| \geq 3$

Método 1

Se debe cumplir que $x+1 \neq 0$ y $\left| \frac{2x-1}{x+1} \right| \geq 3$. Entonces aplicando la parte

2 del teorema 4 y el ejercicio 33 de la sección 2.2 se tiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x-1}{x+1} \right| \geq 3 &\Leftrightarrow \frac{|2x-1|}{|x+1|} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{|2x-1|^2}{|x+1|^2} \geq 3^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{|2x-1|^2}{|x+1|^2} \geq 3^2 \Leftrightarrow |2x-1|^2 \geq 3^2 \cdot |x+1|^2 \\ &\Leftrightarrow |(2x-1)|^2 \geq 3^2 \cdot |(x+1)|^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq (3(x+1))^2 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)^2 - (3(x+1))^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1-3x-3)(2x-1+3x+3) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (-x-4)(5x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-4, -\frac{2}{5} \right] \end{aligned}$$

Pero $x+1 \neq 0$, entonces la solución es el conjunto $\left[-4, -\frac{2}{5} \right] \cup \left[-1, -\frac{2}{5} \right]$

Método 2

Se resuelven las ecuaciones $\left| \frac{2x-1}{x+1} \right| = 3$ y $x+1=0$ como sigue

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x-1}{x+1} \right| = 3 &\Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1} = 3 \text{ o } \frac{2x-1}{x+1} = -3 \\ &\Leftrightarrow 2x-1 = 3x+3 \text{ o } 2x-1 = -3x-3 \\ &\Leftrightarrow -x = 4 \text{ o } 5x = -2 \Leftrightarrow x = -4 \text{ o } x = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Los números -4 , -1 y $-\frac{2}{5}$ determinan cuatro intervalos en la recta numérica en los que se toman valores de prueba como sigue

Número x de prueba	x	$2x-1$	$x+1$	$\left \frac{2x-1}{x+1} \right $	Relación con 3
$-\infty < x < -4$	-5	-11	-4	$\frac{11}{4}$	$\frac{11}{4} < 3$
$-4 < x < -1$	-2	-5	-1	5	$5 > 3$
$-1 < x < -\frac{2}{5}$	-0.5	-2	0.5	4	$4 > 3$
$-\frac{2}{5} < x < \infty$	0	-1	1	1	$1 < 3$

De donde, los intervalos $]-4, -1[$ y $]-1, -\frac{2}{5}[$ forman parte de la solución.

Analizando los extremos de estos intervalos se observa que -4 y $-\frac{2}{5}$

satisfacen la desigualdad $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| \geq 3$. Por lo tanto, la solución es el

conjunto $[-4, -1[\cup]-\frac{2}{5}, \infty[$

Nota

Para resolver $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| < 3$ o $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| \leq 3$ se usan los dos métodos del ejemplo 7, por lo que observando la tabla anterior y analizando los extremos de los intervalos se tiene que

- La solución de $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| < 3$ es $]-\infty, -4[\cup]-\frac{2}{5}, \infty[$
- La solución de $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| \leq 3$ es $]-\infty, -4] \cup [-\frac{2}{5}, \infty[$

Se debe tener especial cuidado en el método 1 del ejemplo 7, cuando se eleva al cuadrado cada miembro de la desigualdad, si ésta es entre números no negativos el sentido de la desigualdad no cambia, y si es entre números no positivos, entonces cambia el sentido de la desigualdad al elevar al cuadrado ($a < b \leq 0 \Rightarrow a^2 > b^2$)

Ejemplo 8

Demostrar que $|x-3| < 1 \Rightarrow |x+1| < 5$

Solución

Se aplica la parte 2 del teorema 6. Observe:

$$\begin{aligned} |x-3| < 1 &\Rightarrow -1 < x-3 < 1 \Rightarrow -1+4 < x-3+4 < 1+4 \\ &\Rightarrow 3 < x+1 < 5 \Rightarrow |x+1| < 5 \end{aligned}$$

Ejemplo 9

Si $|2x+1| < \frac{1}{2}$ y $|1-x| < \frac{1}{2}$, demostrar que $|x+2| < 1$

Solución

Se usa la desigualdad del triángulo. Observe:

$$|x+2| = |(2x+1) + (1-x)| \leq |2x+1| + |1-x| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Ejercicios 2.3

En los ejercicios del 1 al 5, elimine eficazmente las barras de valor absoluto.

1. $|2-3+1-4|$
2. $|\sqrt{2}-2|$
3. $|2x-1|$
4. $|x-1|$, si $x < 1$
5. $|x^2+2x+1|$

Del 6 al 25, resuelva cada relación dada.

6. $|x - 1| = 5$

7. $|2x + 3| = 1 - x$

8. $|x + 1| = |2x - 1|$

9. $\left| \frac{x-1}{1-2x} \right| = 4$

10. $\left| \frac{6x-12}{x+2} \right| = \frac{-5}{x+1}$

11. $|x - 2| < 1$

12. $|2x + 1| \geq -3$

13. $\left| \frac{2-x}{3+x} \right| < 4$

14. $|3x - 1| < 1 - x$

15. $|2x + 3| \geq x + 2$

16. $|x - 1| < |2x|$

17. $2 < |4 - x| < 3$

18. $\left| \frac{1}{x-1} \right| \leq x + 2$

19. $0 < |x - 2| < \frac{1}{4}$

20. $\left| \frac{x}{1-x} \right| \geq \frac{1}{x+1}$

21. $|3x - 2| < |x + 2|$

22. $\sqrt{\left(\frac{1}{x+1} \right)^2} > 2$

23. $|x^2| \leq 2$

24. $\frac{1}{|3-2x|} > 1$

25. $2 < \left| \frac{3-x}{2-3x} \right| < 3$

Del 26 al 33, demuestre cada proposición.

26. $|x - 1| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{1}{x-2} \right| < 2$

27. $|x + 2| < 1 \Rightarrow \left| \frac{1}{x-1} \right| < \frac{1}{2}$

28. $|x - 3| < 1 \Rightarrow |x + 1| < 5$

29. $|x - 2| < 1 \Rightarrow |x^2 - x - 2| < 5|x - 2|$

30. $|x - 1| < 1 \Rightarrow |x^2 + x - 2| < 4|x - 1|$

31. $-|a| \leq a \leq |a|$

32. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, (b \neq 0)$

33. $|a^n| = |a|^n, n \text{ entero}$

34. $|a| - |b| \leq |a - b|$

35. $|a| - |b| \leq |a + b|$

36. $||a| - |b|| \leq |a - b|$

2.4

Sobre números racionales e irracionales

En la sección 1.1 de este texto se mencionaron los conjuntos de números **N**, **Z**, **Q** y **R** en donde

N = {números naturales}

Z = {números enteros}

Q = {números racionales}

R = {números reales}

En particular el conjunto **Q** de números racionales se define así

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Ejemplo 1

$\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{2}{5}, 3 = \frac{3}{1}, -\frac{5}{4}$, son números racionales.

El conjunto **Q** de números racionales satisface todos los axiomas de los

números reales mencionados en la sección 2.1 y también satisface los axiomas de orden vistos en la sección 2.2. No obstante, existen números reales que no son racionales como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 1

Si p es un número primo positivo, entonces $\sqrt{p}$ no es racional

Demostración

Supóngase que $\sqrt{p}$ es racional. Entonces, existen a y $b \neq 0$ en $\mathbf{Z}$ tales que $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$. Supóngase además que el racional $\frac{a}{b}$ está simplificado; esto es, a y b no admiten un divisor común distinto de 1. Así que:

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b} \Rightarrow p = \left(\sqrt{p}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow pb^2 = a^2$$

$$\Rightarrow p \text{ divide a } a^2 = aa \Rightarrow p \text{ divide a } a$$

(si un número primo divide a un producto, divide a alguno de los factores)

$$\Rightarrow a = pk \text{ para algún } k \text{ en } \mathbf{Z}$$

$$\Rightarrow pb^2 = a^2 = (pk)^2 = p(pk^2) \Rightarrow b^2 = pk^2$$

$$\Rightarrow p \text{ divide a } b^2 = bb \Rightarrow p \text{ divide a } b.$$

Entonces p es divisor común de a y de b lo cual contradice el hecho de que el racional $\frac{a}{b}$ está simplificado. $\square$

Esta proposición muestra que los números racionales dejan infinidad de huecos en la recta numérica.

A los números reales que no son racionales se les llama *irracionales*; los cuales forman un conjunto que es el complemento del conjunto $\mathbf{Q}$ respecto a $\mathbf{R}$; o sea,

$$\mathbf{Q}^c = \mathbf{R} - \mathbf{Q} = \{\text{números irracionales}\}$$

$$\text{Entonces } \mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}^c \text{ y } \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Todo número real tiene una aproximación decimal.

Ejemplo 2

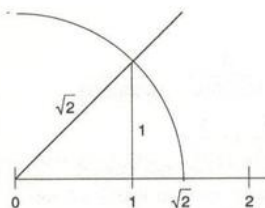
Obtener una aproximación decimal para $\sqrt{2}$

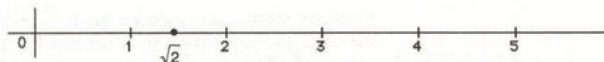
Solución

Nótese que $1^2 < 2 < 2^2$. Extrayendo raíz cuadrada a cada término de esta desigualdad, se tiene

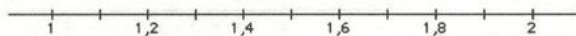
$$1 = \sqrt{1^2} < \sqrt{2} < \sqrt{2^2} = 2$$

O sea, $1 < \sqrt{2} < 2$





Amplificando el intervalo $]1,2[$ y dividiéndolo en 10 partes iguales, se observa esto



¿En qué pedazo de esta amplificación está $\sqrt{2}$? Para ubicarlo en el pedazo correcto, se hace lo mismo que lo hecho antes. Observe:

$(1.3)^2 = 1.69$	Entonces $(1.4)^2 < 2 < (1.5)^2$. De donde $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ O sea, $\sqrt{2}$ se ubica entre 1.4 y 1.5
$(1.4)^2 = 1.96$	
$(1.5)^2 = 2.25$	

Dado que $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$, entonces $\sqrt{2} \approx 1.4$. (El símbolo $\approx$ se lee "aproximadamente igual a")

Nota

El proceso de ir obteniendo cifras decimales de $\sqrt{2}$ es ilimitado. Las primeras siete cifras decimales de $\sqrt{2}$ son

$$\sqrt{2} \approx 1.4142135$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{1}{100000} + \frac{3}{1000000} + \frac{5}{10000000} \\
 &= 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \frac{5}{10^7}
 \end{aligned}$$

Mediante el procedimiento del ejemplo 2, cualquier número real $x > 0$ se puede aproximar con un error tan pequeño como se desee; en cuyo caso se obtiene que

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots \quad (1)$$

lo cual en forma abreviada se escribe así

$$x = a_0.a_1a_2a_3 \dots \quad (2)$$

en donde $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ son números enteros no negativos con

$$0 \leq a_i \leq 9 \text{ para cada } i \geq 0$$

La forma 2 se conoce como la *representación decimal* de x y la forma 1 se conoce como la *expansión decimal* de x .

Para representar un número racional $\frac{a}{b}$ en forma decimal, se divide el numerador a entre el denominador b , poniendo punto y agregando tantos ceros a la derecha en el dividendo como cifras decimales se deseen obtener

Ejemplo 3

Expresar $\frac{37}{15}$ en forma decimal.

Solución

$$\begin{array}{r} 2.4\ 6\ 6 \\ 15 \overline{) 37.0\ 0\ 0} \\ \underline{7\ 0} \\ 1\ 0\ 0 \\ \underline{1\ 0\ 0} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{37}{15} \approx 2.466$$

Nota

Cuando una o más cifras decimales se repite sucesivamente en el cociente, la fracción decimal se llama *decimal periódico* y la cifra o cifras que se repiten forma un número llamado el *periodo* el cual se indica con una raya encima o con puntos suspensivos y todo lo que no forma el periodo, se llama *parte no periódica*.

$$\frac{37}{15} = 2.4\overline{6} = 2.466\ldots$$

Parte no periódica = 2.4

Periodo = 6

Los siguientes ejemplos muestran cómo cambiar la forma decimal de un número racional x a la forma $\frac{a}{b}$

Ejemplo 4

Convertir 0.75 a la forma $\frac{a}{b}$

Solución

$$0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

Para convertir un decimal periódico x a la forma $\frac{a}{b}$, se hace esto:

1. Multiplíquese a x por una potencia 10^n de modo que en el producto $10^n x$ el punto decimal quede a la derecha del periodo
2. Multiplíquese a x por una potencia 10^m de modo que en el producto $10^m x$ el punto decimal quede después de la parte no periódica y antes del periodo
3. Calcúlese $10^n x - 10^m x$ y despéjese x reduciéndose a su mínima expresión

Ejemplo 5

Convertir $3.\overline{245}$ a la forma $\frac{a}{b}$

Solución

Supóngase que $x = 3.\overline{245} = 3.24545\dots$, entonces

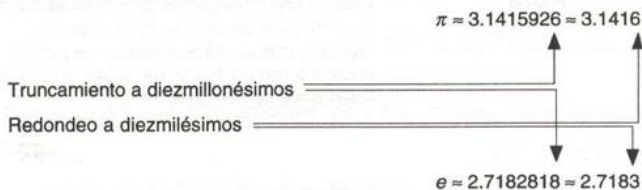
$$\begin{aligned} 1000x &= 3245.45\dots \\ 10x &= 32.45\dots \end{aligned}$$

Calculando $1000x - 10x$ se tiene $990x = 3213$. De donde

$$x = \frac{3213}{990} = \frac{357}{110}$$

Nota

La forma decimal de un número irracional tiene un número ilimitado de cifras en la parte decimal sin tener periodo. En la práctica para trabajar con ellos en forma decimal, se les trunca; o sea, se les corta su parte decimal, o bien se redondean; es decir, se aproximan a unidades de orden inmediato superior. Por ejemplo



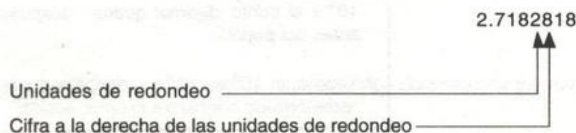
Esto mismo se hace con la forma decimal de los racionales.

Para redondear un número a una unidad determinada se hace esto:

1. Se localiza la cifra de las unidades de redondeo
2. Se compara con el 5 la cifra que está a la derecha de las unidades de redondeo y entonces
 - Si es menor que 5, el redondeo se obtiene cambiando por cero cada dígito a la derecha de las unidades de redondeo.
 - Si es mayor o igual que 5, el redondeo se obtiene como en el caso anterior y se suma 1 (la unidad) a la cifra de las unidades de redondeo

Ejemplo 6

Redondear 2.7182818 a diezmilésimos ($= 0.0001$).

Solución

Dado que $8 > 5$, entonces el redondeo de 2.7182818 a diezmilésimos es

$$2.7183000 = 2.7183$$

Se sumó 1 a las unidades de redondeo, $2 + 1 =$ _____

Las cifras a la derecha de las unidades de redondeo se convierten en ceros _____

Cuando se hacen cálculos con decimales, se usa notación científica.

La notación científica de un número positivo se forma colocando el punto decimal inmediatamente después de la primera cifra significativa del número, lo cual se multiplica por una potencia de 10, cuyo exponente es:

1. El número de lugares que se recorrió el punto hasta su nueva posición, si el recorrido es a la izquierda
2. El inverso multiplicativo del número de lugares que se recorrió el punto hasta su nueva posición, si el recorrido es a la derecha

Ejemplo 7

Primera cifra significativa del número. Entonces el punto se coloca después de ella así _____

$$0.00045 = 4.5 \times 10^{-4}$$

El punto se recorrió 4 lugares a la derecha, entonces el exponente es _____

Ejemplo 8

Usando notación científica calcular $\frac{(0.0044)(320)}{(220000)(0.016)}$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{(0.0044)(320)}{(220000)(0.016)} &= \frac{(4.4 \times 10^{-3})(3.2 \times 10^2)}{(2.2 \times 10^5)(1.6 \times 10^{-2})} = \frac{(4.4)(3.2)(10^{-3})(10^2)}{(2.2)(1.6)(10^5)(10^{-2})} \\ &= \frac{(2)(2)(10^{-1})}{(1)(1)(10^3)} = (4)\left(\frac{10^{-1}}{10^3}\right) = (4)(10^{-1-3}) = (4)(10^{-4}) = 0.0004. \end{aligned}$$

Enseguida se tienen algunas proposiciones que se usan para determinar números irracionales.

Proposición 2

Si w es irracional y $\frac{a}{b} \neq 0$ es un racional, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)(w)$ es irracional

Demostración

Si $\left(\frac{a}{b}\right)(w)$ es racional, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)(w) = \frac{m}{n}$ para algunos enteros m y $n \neq 0$. De donde

$$w = \frac{\frac{m}{n}}{\frac{a}{b}} = \frac{mb}{na}$$

O sea, w es racional. Esto contradice que w es irracional; por lo que, $\left(\frac{a}{b}\right)(w)$ es irracional. $\square$

Los números irracionales no satisfacen algunos axiomas de los números reales.

Ejemplo 9

El conjunto $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ de números irracionales no es cerrado respecto a la adición ni respecto a la multiplicación, porque

$$\sqrt{3}\sqrt{3} = 3 \in \mathbf{Q}, \quad \sqrt{5} + (-1)\sqrt{5} = \sqrt{5} - \sqrt{5} = 0 \in \mathbf{Q}$$

Proposición 3

Si w es irracional y $\frac{a}{b}$ es racional, entonces $\frac{a}{b} + w$ es irracional

Demostración

Si $\frac{a}{b} + w$ es racional, entonces $\frac{a}{b} + w = \frac{m}{n}$ para algunos enteros m y $n \neq 0$. De donde

$$w = \frac{m}{n} - \frac{a}{b} = \frac{mb - na}{nb}$$

O sea w es racional lo cual es una contradicción. $\square$

Ejemplo 10

Demostrar que $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ es irracional.

Solución

$$\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1+2\sqrt{2}+2}{1-2} = \frac{3+2\sqrt{2}}{-1} = -3-2\sqrt{2}$$

Así que por las proposiciones 2 y 3, $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -3-2\sqrt{2}$ es irracional.

El ejemplo 10 muestra un cociente de dos irracionales el cual es irracional. Esto no siempre es cierto, porque:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \in \mathbf{Q}$$

Por lo tanto, la división no es una operación cerrada en $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$; o sea, el cociente de dos números irracionales no siempre es un número irracional.

Proposición 4

La raíz cuadrada de un número positivo que no es el cuadrado de un número racional, es un número irracional

Demostración

Supóngase que para $x > 0$ no existen a y $b \neq 0$ en $\mathbf{Z}$ tales que $x = \left(\frac{a}{b}\right)^2$

Entonces $\sqrt{x}$ es irracional, porque:

Si $\sqrt{x} \in \mathbf{Q}$, entonces existen a y $b \neq 0$ en $\mathbf{Z}$ tales que $\sqrt{x} = \frac{a}{b}$. De donde

$$x = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \text{ lo cual es una contradicción.} \quad \square$$

Ejemplo 11

$\sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{12}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{14}, \sqrt{18}, \sqrt{20}$ son irracionales.

El conjunto $\mathbf{Q}$ de números racionales es *denso* como se demuestra enseguida.

Propiedad de densidad

Si x y y son números racionales con $x < y$, entonces existe un racional z tal que $x < z < y$

Demostración

Usando los axiomas $\mathbf{O}_3$ y $\mathbf{O}_4$ del orden se tiene

$$x < y \Rightarrow 2x = x + x < x + y \text{ y } x + y < y + y = 2y$$

$$\Rightarrow 2x < x + y < 2y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$$

Así que $z = \frac{x+y}{2}$ es el número deseado. $\square$

En la práctica para determinar un número racional o un número irracional entre cualesquiera dos números reales distintos, se usa la forma decimal de ellos.

Ejemplo 12**Solución**

Encontrar un número irracional w y un número racional r entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$

Como $\sqrt{2} \approx 1.4142$ y $\sqrt{3} \approx 1.7320$, considérese la diferencia

$$1.7 - 1.4 = 0.3 = \frac{3}{10}. \text{ Tómese un número racional } q \text{ entre } 0 \text{ y } \frac{3}{10}; \text{ o sea,}$$

$$0 < q < \frac{3}{10}. \text{ Entonces } w = q + \sqrt{2} \text{ y } r = 1.4 + q = \frac{14}{10} + q = \frac{7}{5} + q \text{ son los}$$

números deseados (compruébelo para $q = \frac{1}{10}$)

Ejemplo 13

Encontrar un irracional w y un racional r entre $-\frac{3}{4}$ y $-\frac{1}{2}$

Solución

$$-\frac{3}{4} < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{3}{4} \Rightarrow 0.5 < 0.75. \text{ Considérese la diferencia}$$

$$0.7 - 0.5 = 0.2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

y tómese un número racional q entre 0 y $\frac{1}{5}$. Tómese además un irracional cuya parte decimal esté entre 0.5 y 0.75; por ejemplo $\sqrt{3} = 1.73205$, entonces

$$0.5 < 0.5 + q < 0.75 \text{ y } 0.5 < \sqrt{3} - 1 < 0.75$$

$$\Rightarrow -0.75 < -(0.5 + q) < -0.5 \text{ y } -0.75 < 1 - \sqrt{3} < -0.5$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} < -\frac{1}{2} - q < -\frac{1}{2} \text{ y } -\frac{3}{4} < 1 - \sqrt{3} < -\frac{1}{2}$$

Así que $w = 1 - \sqrt{3}$ y $r = -\frac{1}{2} - q$ son los números deseados.

Existen otras técnicas para intercalar racionales e irracionales entre dos números reales distintos.

Ejemplo 14**Solución**

Encontrar un irracional w y un racional r en $]1, \sqrt{2}[$

- Usando los axiomas O_3 y O_4 del orden se tiene

$$1 < \sqrt{2} \Rightarrow 2 = 1 + 1 < 1 + \sqrt{2} \text{ y } 1 + \sqrt{2} < \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2 < 1 + \sqrt{2} < 2\sqrt{2} \Rightarrow 1 < \frac{1 + \sqrt{2}}{2} < \sqrt{2}$$

Así que $w = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ es un irracional en $]1, \sqrt{2}[$

- Nótese que

$$1 < \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 1 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} = 1 + \frac{21}{100} < 1 + 1 = 2$$

$$\text{O sea } 1 < \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2 < 2 \text{ o lo que es lo mismo } 1^2 < \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2 < (\sqrt{2})^2$$

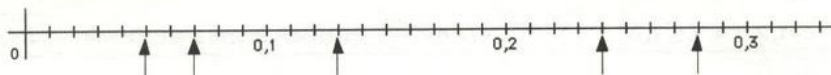
De donde, por el ejercicio 34 de la sección 2.2 (extrayendo raíz cuadrada a cada término de la desigualdad) se tiene

$$1 < 1 + \frac{1}{10} < \sqrt{2}$$

Así que $r = 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$ es un racional en $]1, \sqrt{2}[$

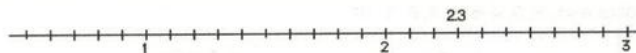
Ejercicios 2.4

1. Escriba el número decimal que corresponde al punto que indica la flecha.



En los ejercicios del 2 al 7, localice en la recta numérica cada número decimal.

Ejemplo: 2.3



2. 3.28 3. 20.7 4. -5.15 5. $-\frac{3}{5}$ 6. $-\frac{40}{7}$ 7. $\frac{25}{3}$

Del 8 al 17, exprese en forma decimal cada racional.

8. $\frac{1}{4}$ 9. $\frac{1}{6}$ 10. $\frac{12}{5}$ 11. $-\frac{17}{4}$ 12. $-\frac{20}{21}$ 13. $\frac{31}{5}$
 14. $-\frac{51}{6}$ 15. $\frac{216}{521}$ 16. $\frac{4301}{9702}$ 17. $-\frac{49}{6}$

Del 18 al 27, exprese en la forma $\frac{a}{b}$ cada racional.

18. 5.25 19. 0.007 20. 4.82 21. -0.4 22. $-8.0\overline{32}$ 23. $0.3\overline{27}$
 24. $-5.\overline{8}$ 25. $-0.201717...$ 26. $-0.\overline{1}$ 27. $3.0\overline{19}$

Del 28 al 37, califique de racional o irracional cada número (Justifique su respuesta).

28. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ 29. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 30. $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ 31. $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}$ 32. $0.5\overline{01}$
 33. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ 34. $\sqrt{6}$ 35. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 36. $\sqrt{1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9}}$ 37. $\sqrt{\frac{0.04}{0.0001}}$

Del 38 al 45, encuentre tres valores racionales y tres irracionales para x .

38. $0 < x < 0.001$ 39. $0 < x < 1$ 40. $-2 < x < -1$ 41. $-\frac{5}{4} < x < -1$ 42. $-1 < x < -0.9$
 43. $\sqrt{3} < x < \sqrt{5}$ 44. $-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{3}$ 45. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Del 46 al 52, calcule y represente en la recta numérica el valor de la expresión para cada valor de n dado.

46. $\frac{(-1)^n}{n}$, para $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

47. $n + \frac{(-1)^n}{n}$, para $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$

48. $1 - \frac{1}{n}$, para $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

49. $\frac{1}{n} + (-1)^n n$, para $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

50. $\frac{1}{n} - n$, para $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

51. $n - \frac{1}{n}$, para $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

52. $(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, para $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

Del 53 al 58, redondee cada número a lo que se indica en el paréntesis.

53. 2.078, (centésimos)

54. 149 978 856, (millones)

55. 37.8456, (décimos)

56. 0.84, (unidades)

57. 159 315 729 414, (centenas de millón)

58. 0.000 000 731 4, (millonésimos)

Del 59 al 62, exprese en notación científica cada cantidad.

59. 0.00078

60. 150 000 000

61. 0.000 007 521

62. 529 137. 003

Del 63 al 66, exprese en forma decimal cada cantidad.

63. $0.001\ 783 \times 10^8$

64. $15\ 328.401 \times 10^{-4}$

65. 7.43×10^{-6}

66. 9.11×10^{-10}

Del 67 al 71, simplifique cada expresión usando notación científica.

67. $\frac{0.000012}{0.0003}$

68. $(8000000)^3 (0.002)^2$

69. $\frac{(200)(9000)}{(18000)(40000)}$

70. $\frac{(0.001)^3 (20000)^2}{(50000)^2 (0.003)^3}$

71. $\frac{(51000)^2 (0.0004)^3}{(0.002)^3 (0.0017)^2}$

Del 72 al 75, resuelva cada problema.

72. Los radios medios de la Tierra y de la Luna respectivamente miden 6 374 289 m y 1 745 231 m. ¿Cuántas lunas caben aproximadamente en la Tierra?

73. Un átomo de hidrógeno tiene forma esférica con radio aproximadamente igual a 0. 000 000 001 m. Calcule en forma aproximada su volumen.

74. La extensión territorial de la República Mexicana es aproximadamente igual a 1.953×10^6 km². Cada persona requiere 2.2×10^6 cm² para construir su casa y requiere 2.5×10^7 cm² de terreno para sembrar y poder subsistir. Si todo el territorio nacional fuera cultivable, ¿cuántas personas en esas condiciones poblarían la República?

75. El diámetro de un glóbulo rojo de la sangre mide aproximadamente 0.000 000 75 m, ¿cuántos glóbulos rojos caben en 1 mm³?

2.5 Axioma del supremo

Primeramente se definirán los siguientes conceptos.

Definición 1

Considérese un conjunto A no vacío de números reales

1. Un número real c es *elemento máximo* de A ; denotado ello como $c = \max A$, si

- $c \in A$ y
- $c \geq a$ para todo a en A

2. Un número real c es *elemento mínimo* de A ; denotado ello como $c = \min A$, si

- $c \in A$ y
- $c \leq a$ para todo a en A

Ejemplo 1

Si $A = \{0, 1, 2, 3\}$, entonces $\max A = 3$ y $\min A = 0$

Ejemplo 2

Si $A = [0, 1]$, entonces $\max A = 1$ y $\min A = 0$

Ejemplo 3

Si $A =]-1, 1[$, entonces A no tiene elemento mínimo ni elemento máximo porque $-1 \notin A$ y $1 \notin A$

En este último ejemplo el 1 satisface que $1 \geq a$ para todo a en A y el -1 es tal que $-1 \leq a$ para todo a en A ; por esto el 1 y el -1 son *cotas* de A . Precizando se dice que

Definición 2

Considérese un conjunto A de números reales

1. Un número real c es *cota superior* de A si $c \geq a$ para todo a en A . El conjunto A está *acotado superiormente* si tiene una cota superior

2. Un número real c es *cota inferior* de A si $c \leq a$ para todo a en A . El conjunto A está *acotado inferiormente* si tiene una cota inferior

3. El conjunto A es *acotado* si está acotado superior e inferiormente

Ejemplo 4

Si $A = [0, \infty[$, entonces

- Cualquier número no positivo es cota inferior de A por lo que A está acotado inferiormente.
- Para cada número real c , se tiene $c \in A$ o $c \notin A$. Pero

$c \in A \Rightarrow c < c + 1 \in A \Rightarrow c$ no es cota superior de A .

$c \notin A \Rightarrow c < 0 \in A \Rightarrow c$ no es cota superior de A .

O sea, ningún número real es cota superior de A ; por lo que, A no está acotado superiormente.

Ejemplo 5

Si $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 1\}$, entonces

$$x^2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{1} \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Por esto, $A = \{x \in \mathbb{Q} : -1 < x < 1\}$

De donde 1 y -1 son respectivamente cotas superior e inferior de A . Así que A está acotado superior e inferiormente. De hecho cualquier número real $x \geq 1$ es cota superior de $A = \{x \in \mathbb{Q} : -1 < x < 1\}$ en donde 1 es la menor de todas ellas. Así mismo, -1 es la máxima cota inferior de A .

La máxima y la mínima cotas inferior y superior de un conjunto no vacío A reciben nombres especiales como se enuncia enseguida.

Definición 3

Considérese un conjunto A no vacío de números reales.

1. Un número real c es el *supremo* de A ; denotado ello como $c = \sup A$, si
 - c es cota superior de A y
 - $c \leq x$ para toda cota superior x de A
2. Un número real c es el *ínfimo* de A ; denotado ello como $c = \inf A$, si
 - c es cota inferior de A y
 - $c \geq x$ para toda cota inferior x de A

Ejemplo 6

Si $A = \{0.1, 0.11, 0.111, \dots\}$, entonces

- 0.1 es cota inferior de A y si x es cota inferior de A , entonces $x \leq 0.1$; por lo que, $\inf A = 0.1$
- $0.\bar{1}$ es cota superior de A y si x es cota superior de A , entonces $x \geq 0.\bar{1}$; por lo que $\sup A = 0.\bar{1} = \frac{1}{9}$

Ejemplo 7

Si $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 4\}$, entonces $A = [-2, 2]$. De donde $\inf A = -2$ y $\sup A = 2$

En los ejemplos 6 y 7, el conjunto A es no vacío y está acotado superiormente. En los números reales todos los conjuntos con estas características tienen un supremo. Ello lo garantiza el siguiente axioma.

Axioma del supremo

(Axioma de completéz de los números reales). Cada conjunto A no vacío de número reales que está acotado superiormente, tiene un supremo que es un número real

Ejemplo 8

El conjunto $A =]0, 1[$ es no vacío y está acotado superiormente (1 es cota superior de A); entonces por el axioma del supremo, el conjunto A tiene un supremo c en $\mathbb{R}$. En este caso $c = 1$ porque:

- 1 es cota superior de A y
- Si x es cota superior de A y $x < 1$ entonces

$$0 < x < \frac{x+1}{2} < 1$$

lo cual es una contradicción pues $\frac{x+1}{2}$ está en A y x es cota superior de A . De donde $1 \leq x$ para toda cota superior x de A . O sea, $\sup A = 1$

Propiedad arquimediana

Si x y y son números reales positivos, entonces existe un entero positivo n tal que $nx > y$

Demostración

Supóngase que $nx \leq y$ para todo número entero positivo n . Considérese el conjunto $A = \{nx : n \in \mathbb{Z}^+\}$ en donde $\mathbb{Z}^+$ denota el conjunto de números enteros positivos. Entonces $x \in A$ y y es cota superior de A . O sea, A es no vacío y está acotado superiormente. De donde por el axioma del supremo, existe un número real $c = \sup A$. Pero

$$x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow c - x < c$$

Así que, por ser c la mínima cota superior de A existe n_0 en $\mathbb{Z}^+$ tal que $c - x < n_0 x \leq c$. De donde $c < n_0 x + x = (n_0 + 1)x$ lo cual es una contradicción pues $(n_0 + 1)x$ está en A y c es cota superior de A . Por lo tanto, existe un entero positivo n tal que $nx > y$ □

Corolario 1

Para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo n tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$

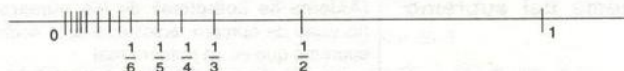
Demostración

Sigue inmediatamente de la propiedad arquimediana, tomando $x = \varepsilon$ y $y = 1$ □

Ejemplo 9

Si $A = \left\{ \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$, entonces:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$



Nótese que:

- 0 es cota inferior de A y si x es cota inferior de A con $x > 0$, entonces por el corolario 1 existe n en $\mathbb{Z}^+$ tal que $x > \frac{1}{n}$ lo cual contradice que x es cota inferior de A ; por lo que $x \leq 0$ para toda cota inferior x de A . Así que, $\inf A = 0$
- 1 es cota superior de A y si x es cota superior de A , entonces $x \geq 1$; por lo que $\sup A = 1$

El conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales satisface todos los axiomas de los números reales, excepto el axioma del supremo como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10

El conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$ es no vacío y está acotado superiormente en $\mathbb{Q}$. Sin embargo A no tiene un supremo en $\mathbb{Q}$. De hecho $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Ejercicios 2.5

Del 1 al 5, determine (si existen) tres cotas inferiores y tres cotas superiores de cada conjunto.

- $\left\{n - \frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\right\}$
- $\left\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - 2| < \frac{1}{4}\right\}$
- $\left\{x \in \mathbb{R} : |3x - 2| < |x + 2|\right\}$
- $\left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{2-x}{3+x}\right| < 4\right\}$
- $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 3 \geq 0\right\}$

Del 6 al 10, diga si el conjunto dado es acotado inferiormente, acotado superiormente y/o acotado. Justifique su respuesta.

- $\{2, 3, 5\}$
- $\{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x < 3\}$
- $\{0.9, 0.99, 0.999, \dots\}$
- $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x > 0\}$
- $\left\{\frac{n^2 + (-1)^n}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\right\}$

Del 11 al 20, determine (si existen) el sup y el inf de cada conjunto. Justifique su respuesta.

- $]0, 1[$
- $[0, 1] \cup \{-1\}$
- $]0, \infty[$
- $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x < 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R} : 4x - x^2 < 1\}$
- $\left\{\frac{(-1)^n}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\right\}$

17. $\{0.2, 0.23, 0.233, \dots\}$

18. $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| > 2\}$

19. $\{x \in \mathbb{R} : x^3 + 2 < 0\}$

20. $\left\{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) : n = 1, 2, 3, \dots\right\}$

21. Demuestre que el supremo de un conjunto es único.

22. Demuestre que todo subconjunto de números reales no vacío y acotado inferiormente tiene un ínfimo en los reales.

23. Demuestre que para cada número real x , existe un entero m tal que $m \leq x \leq m+1$ 24. *Densidad de los números racionales en los reales.* Demuestre que si x y y son números reales con $x < y$, entonces existe un número racional r tal que $x < r < y$ 25. Si $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$, demuestre que $\sup A = \sqrt{2}$ **2.6****Inducción matemática**

La *inducción* es un procedimiento que permite generalizar a partir de hechos particulares.

Ejemplo 1

Considérense las siguientes relaciones

$$P(0): 0 < 0 + 1$$

$$P(1): 1 < 1 + 1$$

$$P(2): 2 < 2 + 1$$

A partir de estas tres relaciones se obtiene la relación general

$$P(n): n < n + 1$$

Ejemplo 2

Considérense las siguientes relaciones

$$P(1): 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(2): \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$P(3): \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

A partir de ellas se obtiene que

$$P(n): \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

Cuando se generaliza a partir de hechos particulares siempre se duda de que la relación general obtenida sea verdadera. Para salir de esa duda, en matemáticas se usa el *principio de inducción matemática* el cual se enuncia enseguida.

Principio de inducción matemática

Si una proposición $P(n)$ es tal que

1. $P(1)$ es verdadero y

2. $P(k)$ verdadero $\Rightarrow P(k+1)$ verdadero,

entonces

$P(n)$ es verdadero para todo número natural n ($n \in \mathbf{N}$)

Ejemplo 3

Demostrar con el principio de inducción que

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

para todo $n \in \mathbf{N}$.

Solución

Considérese la proposición

$$P(n): \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

Se demostrará enseguida que $P(n)$ satisface las condiciones 1 y 2 del principio de inducción. Observe:

1. Se debe demostrar que $P(1)$ es verdadero. Para obtener $P(1)$ se sustituye n por 1 en la relación que define a la proposición. Así

$$P(1): \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+1}$$

Comentario Nótese que al sustituir n por 1 en la relación que sigue

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

se obtiene que

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{1+1}\right) = \frac{1}{1+1}$$

En ello se observa que el primer factor y el último del primer miembro de la igualdad, son el mismo factor $\left(1 - \frac{1}{2}\right)$; por lo que, el primer miembro empieza y termina en $\left(1 - \frac{1}{2}\right)$. Así pues

$$P(1): \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+1}$$

¿Es verdadera esta relación? La respuesta es sí, porque

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

Con esto se ha demostrado que $P(1)$ es verdadero.

2. Se debe demostrar además que

$$\boxed{P(k) \text{ verdadero}} \Rightarrow \boxed{P(k+1) \text{ verdadero}}$$

Hipótesis

O sea, se debe demostrar que

"Si la relación que define a $P(k)$ es verdadera, entonces la relación que define a $P(k+1)$ también es verdadera"

Es decir, a partir de la hipótesis:

$$P(k): \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1} \text{ verdadero,}$$

se debe demostrar que:

$$P(k+1): \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{k+2} \text{ es verdadero.}$$

Observe lo que sigue:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)}_{\text{Por hipótesis}} \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{k+1}\right) \left(1 - \frac{1}{k+2}\right) = \left(\frac{1}{k+1}\right) \left(\frac{k+2-1}{k+2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{k+1}\right) \left(\frac{k+1}{k+2}\right) = \frac{1}{k+2} \end{aligned}$$

Esto último demuestra que

$P(k+1)$ es verdadero siempre que $P(k)$ sea verdadero

Con ello se ha demostrado que la proposición $P(n)$ satisface la condición 2 del principio de inducción. Como además $P(n)$ satisface la condición 1, se concluye por dicho principio que

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

es válido para todo $n \in \mathbf{N}$.

Ejemplo 4

Demostrar que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

para todo n en $\mathbf{N}$.

Solución

Considérese la proposición

$$P(n): 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Se demostrará enseguida que $P(n)$ satisface las condiciones 1 y 2 del principio de inducción matemática.

1. $P(1): 1 = 1^2$ es verdadero.

2. Se demostrará que

Hipótesis

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

$\Rightarrow$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

$P(k)$ verdadero

$P(k+1)$ verdadero

Observe:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Con esto se ha demostrado que

$P(k+1)$ es verdadero siempre que $P(k)$ sea verdadero

Por satisfacer $P(n)$ las condiciones 1 y 2 del principio de inducción, se concluye que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

para todo n en $\mathbf{N}$.

Ejemplo 5

Demostrar que $2^n > n$ para todo número natural n .

Solución

Considérese la proposición

$$P(n): 2^n > n$$

Entonces:

1. $P(1): 2^1 > 1$ es verdadero

2. Supóngase que $P(k): 2^k > k$ es verdadero para algún $k > 1$. A partir de esto se tiene:

a) Multiplicando por 2 ambos lados de la desigualdad $2^k > k$ se obtiene

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > k \cdot 2 = k + k$$

b) Sumando k en ambos lados de la desigualdad $k > 1$ se tiene

$$k + k > k + 1$$

c) De las relaciones establecidas en los incisos a) y b) se infiere por transitividad que

$$2^{k+1} > k + 1$$

O sea, $P(k+1): 2^{k+1} > k+1$ es verdadero. Con ello se ha demostrado que

$P(k+1)$ es verdadero siempre que $P(k)$ sea verdadero

Por satisfacer $P(n)$ las condiciones 1 y 2 del principio de inducción, se concluye que

$$P(n): 2^n > n$$

es válido para todo n en $\mathbf{N}$.

Ejercicios 2.6

En los ejercicios del 1 al 10, verifique las relaciones dadas y obtenga y demuestre la relación general usando el principio de inducción.

$$1. \begin{cases} 1 = \frac{1(1+1)}{2} \\ 1+2 = \frac{2(2+1)}{2} \\ 1+2+3 = \frac{3(3+1)}{2} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 1^3 = 1^2 \\ 1^3 + 2^3 = (1+2)^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 1 - \frac{1}{4} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{5}{4}} \\ 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^3}{\frac{5}{4}} \\ 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^4}{\frac{5}{4}} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 1 \cdot 2^0 = 1 + (1-1) \cdot 2^1 \\ 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 = 1 + (2-1) \cdot 2^2 \\ 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 = 1 + (3-1) \cdot 2^3 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} 2 \text{ es factor de } 1^2 + 1 \\ 2 \text{ es factor de } 3^2 + 1 \\ 2 \text{ es factor de } 5^2 + 1 \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 5 \text{ es divisor de } 1^4 - 1 \\ 5 \text{ es divisor de } 2^4 - 1 \\ 5 \text{ es divisor de } 3^4 - 1 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3 \text{ es factor de } 1^3 - 1 + 3 \\ 3 \text{ es factor de } 2^3 - 2 + 3 \\ 3 \text{ es factor de } 3^3 - 3 + 3 \end{cases} \quad 8. \begin{cases} (2)(1) \leq 2^1 \\ (2)(2) \leq 2^2 \\ (2)(3) \leq 2^3 \end{cases} \quad 9. \begin{cases} (ab)^1 = a^1 b^1 \\ (ab)^2 = a^2 b^2 \\ (ab)^3 = a^3 b^3 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1} \\ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2(2+1)} = \frac{2}{2+1} \\ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3(3+1)} = \frac{3}{3+1} \end{cases}$$

Del 11 al 24, demuestre cada relación para todo número natural n usando el principio de inducción.

$$11. 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$12. 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$13. 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}, \quad z \neq 1.$$

$$14. n+1 = 1 + n$$

$$15. -2 + 1 + 4 + \dots + (3n-5) = \frac{n}{2}(3n-7)$$

$$16. (1+a)^n \geq 1 + na, \quad a \geq -1.$$

$$17. (-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + \dots + (-2)^n = \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3}$$

$$18. 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$19. 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}, \quad r \neq 1.$$

$$20. 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$

$$21. 3 + 8 + 13 + \dots + (5n-2) = \frac{n}{2}(5n+1)$$

$$22. -1 + 1 + 3 + \dots + (2n-3) = n(n-2)$$

$$23. 2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$$

$$24. 3 + 11 + 19 + \dots + (8n-5) = n(4n-1)$$

$$25. 2^n < n! \text{ para todo número natural } n \geq 4$$

3 FUNCIONES

3.0 Introducción

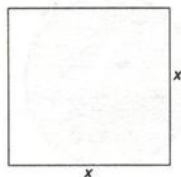
La importancia que la idea de función tiene en matemáticas, está en que casi toda situación de la experiencia diaria puede ser interpretada como una *función*. En este capítulo se encuentran diferentes ejemplos que ilustran la interpretación matemática de muchos fenómenos mediante la idea de función, así como la teoría básica de las funciones.

3.1 Concepto de función

El área A del cuadrado adjunto se obtiene mediante la fórmula

$$A = x^2$$

Tabulando esta relación se tiene



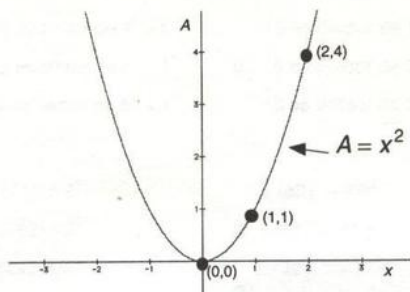
x	$A = x^2$	(x, A)
0	0	(0,0)
1	1	(1,1)
2	4	(2,4)

$$x = 0 \Rightarrow A = 0^2 = 0$$

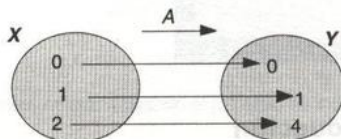
$$x = 1 \Rightarrow A = 1^2 = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow A = 2^2 = 4$$

Al representar cada pareja de la forma (x, A) en el plano cartesiano se obtienen puntos los cuales describen una curva como se muestra enseguida.



Otra forma de representar gráficamente las parejas (x,A) de la relación $A = x^2$ es mediante un *diagrama sagital* como sigue



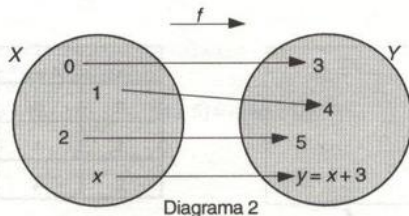
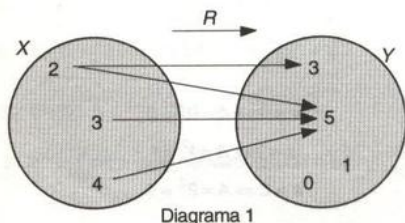
Cada flecha del diagrama define una pareja de la relación; por ejemplo, la flecha que empieza en el 2 y termina en el 4 define la pareja $(2,4)$ de la relación $A = x^2$. Observe que a cada número del círculo de la izquierda le corresponde un único número del círculo de la derecha. Una correspondencia como esa es una *función*.

Definición

Una *función* f es una relación que hace corresponder a cada elemento de un conjunto X un único elemento de un conjunto Y ; se denota así

$$f: X \rightarrow Y \text{ o } X \xrightarrow{f} Y$$

y se lee "función f de X en Y " o brevemente " f de X en Y "



Ejemplo 1

La relación R definida en el diagrama 1, no es función porque existe un elemento en el conjunto X (el 2) al cual le corresponden dos elementos (el 3 y el 5) del conjunto Y .

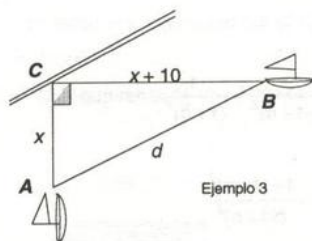
Ejemplo 2

La relación f de X en Y definida en el diagrama 2, es una función porque a cada elemento del conjunto X le corresponde un único elemento del conjunto Y .

En el diagrama 2, la relación $y = x + 3$ es la *regla de correspondencia* que define a la función f . En esta relación los valores de la variable y dependen de los valores de la variable x , lo cual se denota como $y = f(x)$ en donde $f(x)$ se lee " f de x " y se llama la *imagen* de x o el *valor de la función* en x . Por lo que:

- $f(x) = x + 3$ es otra forma de denotar la función $y = x + 3$
- $f(2) = 2 + 3 = 5$ es la imagen del 2.
- ¿Cuál es la imagen del 0?
- ¿Cuál es la del 1?

En la práctica indistintamente se habla de función y , función f o función $f(x)$ para referirse a la misma función definida por $y = f(x)$. A la variable x se le llama *variable independiente* y a la variable y se le llama *variable dependiente*.



Ejemplo 3

Ejemplo 3

Dos lanchas A y B parten al mismo tiempo y desde un mismo punto C de un muelle en dirección perpendicular una de la otra. Si la lancha B avanza 10 kilómetros por hora más rápido que la lancha A la cual avanza 10 kilómetros por hora. Expresar la distancia $AB = d$ entre ambas lanchas como función de x al término de una hora.

Solución

Por el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{x^2 + (x + 10)^2}$$

De donde, $d = \sqrt{2x^2 + 20x + 100}$

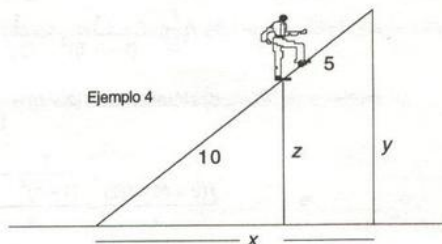
Ejemplo 4

Una escalera de 15 metros de largo está recargada contra la pared de un edificio y un joven está en el punto de la escalera que dista 10 metros del pie de ella como se muestra en la figura adjunta. Expresar z como función de x .

Solución

Por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 15^2 = 225 \quad (1)$$



Ejemplo 4



$x \leq 1$. Así que, $f(-2) = 3(-2) - 1 = -7$

b) Como $a < 1$, entonces $a - 1 < 0 < 1$. Así que $f(a - 1)$ se calcula con la regla $f(x) = 3x - 1$ para $x \leq 1$. Por lo que

$$f(a - 1) = 3(a - 1) - 1 = 3a - 4$$

c) Como $\frac{3}{2} > 1$, entonces $f\left(\frac{3}{2}\right)$ se calcula con la regla $f(x) = x^2 - 1$. Para

$$x > 1. \text{ Por lo tanto, } f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}.$$

d) $|h| < 1 \Rightarrow -1 < h < 1 \Rightarrow 2 - 1 < 2 + h < 2 + 1 \Rightarrow 1 < 2 + h < 3$. De donde

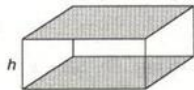
$$f(2 + h) = (2 + h)^2 - 1 = h^2 + 4h + 3$$

Ejercicios 3.1

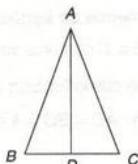
1. Considérese un automóvil con velocidad inicial $2 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ y con una aceleración de $\frac{1}{2} \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$. Físicamente la

velocidad v de este automóvil se relaciona con el tiempo t así $v = 2 + \frac{1}{2}t$. ¿Es la velocidad una función del tiempo?

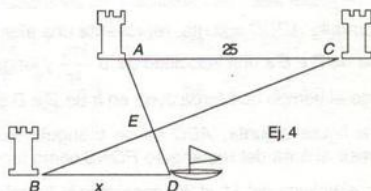
2. El área en la base de un prisma es 12 m^2 . ¿El volumen V del prisma está en función de su altura h ?



Ej. 2



Ej. 3

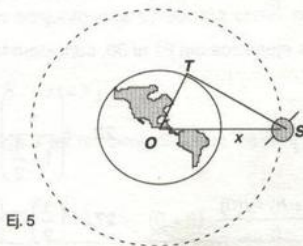


Ej. 4

3. Considérese un triángulo ABC isósceles con $AB = AC = x \text{ cm}$ y altura $AD = x - 1 \text{ cm}$. Expresa el perímetro del triángulo como función de x .

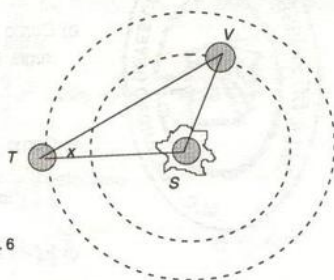
4. En la figura adjunta las distancias del faro C a los faros A y B respectivamente son 25 km y 40 km . El barco D navega hacia B con dirección paralela al segmento $\overline{AC}$. Expresa la distancia del punto E al faro B como función de $x = BD$

5. El radio medio de la Tierra es aproximadamente igual a $6.4 \times 10^3 \text{ km}$. Si un satélite S está a $x \text{ km}$ de altura, exprese la longitud ST de la tangente trazada desde el satélite a la superficie terrestre en función de x .



Ej. 5

6. En la figura adjunta, $ST = a = 1.5 \times 10^8$ km y $SV = b = 1.1 \times 10^8$ km son respectivamente las distancias desde el Sol S a la Tierra T y a Venus V . Exprese la distancia TV de la Tierra a Venus como función del ángulo x para $0 \leq x \leq 47^\circ$

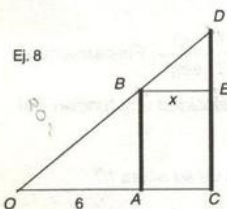


Ej. 6

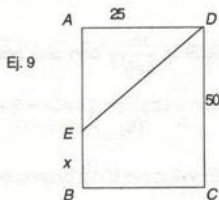
7. El índice de refracción n de un medio transparente es inversamente proporcional a la velocidad v de la luz en dicho medio con una constante de proporcionalidad $c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ lo cual es la velocidad de la luz en el

espacio libre. Exprese a v como función de n y calcule la velocidad de la luz en el diamante cuyo índice de refracción es $n = 2.42$

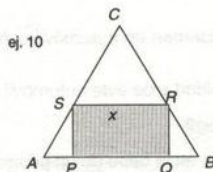
8. En la figura adjunta, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos postes separados x metros entre sí. $\overline{OD}$ es un tirante de 20 metros de longitud que sujeta desde O a ambos postes. Si $\overline{OA}$ mide 6 metros, exprese DE como función de x .



Ej. 8



Ej. 9



ej. 10

9. El rectángulo $ABCD$ adjunto, representa una alberca de 50 metros de largo por 25 metros de ancho. Juan camina de B a E a una velocidad de $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ y luego nada de E a D con una velocidad de $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Si $BE = x$, exprese el tiempo que tarda Juan en ir de B a D en esa forma como función de x .

10. En la figura adjunta, ABC es un triángulo isósceles con $AC = BC = 4$ cm y $AB = 6$ cm. Si $SR = x$, exprese el área del rectángulo $PQRS$ como función de x .

En los ejercicios del 11 al 20, considere la función $f(x) = 3 - x$ para calcular el valor que se indica.

11. $f(-2)$ 12. $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 13. $f(0.07)$ 14. $f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f(-1)$ 15. $\frac{f(4)}{f(-3)}$
 16. $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ ($h \neq 0$) 17. $f(3) + f(0)$ 18. $f(f(-1))$ 19. $f\left(\frac{a-1}{2}\right)$ 20. $\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$, ($b \neq a$)

En los ejercicios del 21 al 30, considere la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$ para calcular el valor que se indica.

21. $f\left(\frac{1}{3}\right)$ 22. $f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)$ 23. $f(0.9)$ 24. $f(f(-3))$ 25. $f(1-a)$, ($a \neq 0$)
 26. $\frac{f(0+h) - f(0)}{h}$, ($h \neq 0$) 27. $f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)$ 28. $f(0) \cdot f(-1)$ 29. $\frac{f(-3)}{f(-2)}$ 30. $\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$, ($b \neq a$)

En los ejercicios del 31 al 37, para calcular el valor que se indica considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x^3} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1-x}{3} & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ \frac{1}{1-x^2} & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

31. $f(0)$

33. $f(-1)$

34. $f(3+h)$, $(0 < h)$

35. $f(0.05)$

36. $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$, $(0 < h < \frac{1}{2})$

37. $\frac{f(a)-f(1)}{a-1}$, $(a < 1)$

En los ejercicios del 38 al 43, diga si la relación define o no una única función de x .

38. $\sqrt{y-1} = x+4$

39. $\sqrt{x-3} = y-1$

40. $x^2 + y^2 = 1$

41. $(x+2)^2 = \frac{x-1}{y}$, $x \neq -2$

42. $y^2 = 4$

43. $y^2 = x^2 - 2x + 1$, $(y \geq 0)$

En los ejercicios del 44 al 50, diga si el conjunto de pares ordenados determina o no una función.

44. $\{(2,1), (4,5), (6,9), (1,-1)\}$

45. $\{(1, \frac{1}{2}), (1, -\frac{1}{2}), (2, \frac{1}{3}), (3, \frac{1}{4})\}$

46. $\{(x, 3-x) : x \in \mathbb{R}\}$

47. $\{(\sqrt{x}, x) : x \in \mathbb{R}\}$

48. $\{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$

49. $\{(|x-1|, x) : x \in \mathbb{R}\}$

50. $\{(x^2 - 2x + 1, x) : x \in \mathbb{R}\}$

En los ejercicios del 51 al 58, encuentre todas las posibles funciones de x definidas en cada relación.

51. $y^2 = x - 1$

52. $x^2 - y^2 = 1$

53. $\sqrt{y} = x$

54. $x - 1 = (y - 2)^2$

55. $x = y^2 - 2y + 1$

56. $x^4 - y^4 = 1$

57. $\frac{1}{x} - \frac{y-1}{2x} = 1$

58. $x^3 + y^3 = 1$

3.2 Dominio, rango y gráfica de una función

Definición

Considérese una función $f: X \rightarrow Y$

- El *dominio* de la función f es un conjunto que se denota como $\mathcal{D}_f$ y se define así

$$\mathcal{D}_f = \{x \in X : f(x) \in Y\}$$

- El *rango* o *imagen* de la función f es un conjunto que se denota como $\mathcal{R}_f$ y se define así

$$\mathcal{R}_f = \{f(x) : x \in \mathcal{D}_f\}$$

En lo sucesivo se considerarán sólo funciones $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$; o sea, se estudiarán sólo funciones $f: X \rightarrow Y$ en donde $X=Y=\mathbf{R}$ = números reales. A estas funciones se les llama *funciones reales de variable real*.

Ejemplo 1

Solución

Encontrar el dominio y el rango de la función $y = \sqrt{x}$

En este caso $y = f(x)$ con $f(x) = \sqrt{x}$ y $f: X \rightarrow Y$ en donde $X=Y=\mathbf{R}$. Entonces:

- Por definición el dominio de f es el conjunto que sigue

$$\mathcal{D}_f = \{x \in X : f(x) \in Y\} = \{x \in \mathbf{R} : \sqrt{x} \in \mathbf{R}\}$$

Pero $\sqrt{x} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow x \geq 0$, entonces $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\} = [0, \infty[$

- Por definición el rango de f es el conjunto que sigue

$$\mathcal{R}_f = \{f(x) : x \in \mathcal{D}_f\}$$

Pero $y = f(x)$ y $y = \sqrt{x} \geq 0$. Entonces

$$f(x) = y \geq 0, \quad y^2 = (\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2} = |x|$$

O sea, $f(x) = y \geq 0$ y $x = -y^2$ o $x = y^2$. Por lo que

$$\mathcal{R}_f = \{y \geq 0 : -y^2 \in \mathcal{D}_f \text{ o } y^2 \in \mathcal{D}_f\}$$

$$= \{y \geq 0 : -y^2 \in [0, \infty[\text{ o } y^2 \in [0, \infty[\}$$

$$= \{y \geq 0 : -y^2 \in [0, \infty[\} \cup \{y \geq 0 : y^2 \in [0, \infty[\}$$

$$= \{0\} \cup [0, \infty[= [0, \infty[$$

Ejemplo 2

Solución

Calcular el dominio y el rango de la función $f(x) = \frac{1}{x-4}$

El dominio de f se calcula así

$$\mathcal{D}_f = \{x \in X : f(x) \in Y\} = \left\{x \in \mathbf{R} : \frac{1}{x-4} \in \mathbf{R}\right\}$$

$$= \{x \in \mathbf{R} : x-4 \neq 0\} = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 4\} =]-\infty, 4[\cup]4, \infty[$$

Considerando $y = f(x)$ el rango de f se calcula como sigue

$$\mathcal{R}_f = \{f(x) : x \in \mathcal{D}_f\} = \{f(x) : x \in]-\infty, 4[\cup]4, \infty[\}$$

Pero $y = \frac{1}{x-4}$, de donde $x = \frac{4y+1}{y}$. Por lo que

$$\mathcal{R}_f = \left\{y : \frac{4y+1}{y} \in]-\infty, 4[\cup]4, \infty[\right\}$$

$$= \left\{y : \frac{4y+1}{y} \in]-\infty, 4[\right\} \cup \left\{y : \frac{4y+1}{y} \in]4, \infty[\right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ y: \frac{4y+1}{y} < 4 \right\} \cup \left\{ y: \frac{4y+1}{y} > 4 \right\} \\
 &= \left\{ y: \frac{4y+1}{y} - 4 < 0 \right\} \cup \left\{ y: \frac{4y+1}{y} - 4 > 0 \right\} \\
 &= \left\{ y: \frac{1}{y} < 0 \right\} \cup \left\{ y: \frac{1}{y} > 0 \right\} = \{y: y < 0\} \cup \{y: y > 0\} \\
 &=]-\infty, 0[\cup]0, \infty[
 \end{aligned}$$

Nota

Si ℓ_x es una recta perpendicular al eje x pasando por el punto x en dicho eje, y si ℓ_y es una recta perpendicular al eje y por un punto y de este eje; entonces el dominio y el rango o imagen de una función f se determinan gráficamente así

$$\mathcal{D}_f = \{x \text{ en el eje } x: \ell_x \cap \mathcal{G}_f \neq \emptyset\}$$

$$\mathcal{R}_f = \{y \text{ en el eje } y: \ell_y \cap \mathcal{G}_f \neq \emptyset\}$$

en donde $\mathcal{G}_f$ denota la gráfica de f y se define como sigue

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y): y = f(x)\}$$

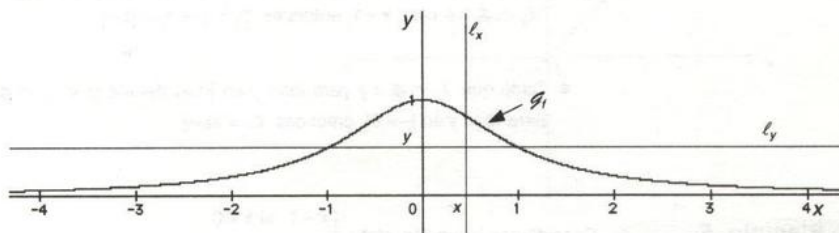
Ejemplo 3

Determine gráficamente el dominio y el rango de la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Solución

Se grafica la función f .

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$



Nótese que todo punto x en $]-\infty, \infty[$ del eje x , es tal que $\ell_x \cap \mathcal{G}_f \neq \emptyset$, por lo que, $\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[$ o $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Nótese también que:

- Todo punto y en $]0,1]$ del eje y , es tal que $\ell_y \cap \mathcal{G}_f \neq \emptyset$
- Todo punto y en $]-\infty,0] \cup]1,\infty[$ del eje y , es tal que $\ell_y \cap \mathcal{G}_f = \emptyset$
Entonces $\mathcal{R}_f =]0,1]$

Ejemplo 4

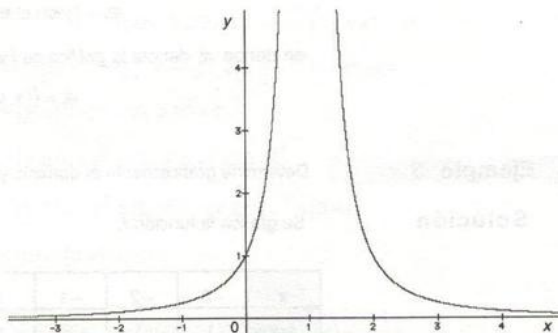
Considérese la función $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

- Graficar f .
- Calcular el dominio y el rango de f .

Solución

a)

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	1	4	4	1	$\frac{1}{4}$



- Como $\ell_x \cap \mathcal{G}_f \neq \emptyset$ para todo x en $]-\infty,1[\cup]1,\infty[$ del eje x , y $\ell_x \cap \mathcal{G}_f = \emptyset$ para $x = 1$, entonces $\mathcal{D}_f =]-\infty,1[\cup]1,\infty[$
- Dado que $\ell_y \cap \mathcal{G}_f \neq \emptyset$ para todo y en $]0,\infty[$ del eje y , y $\ell_y \cap \mathcal{G}_f = \emptyset$ para todo y en $]-\infty,0]$, entonces $\mathcal{R}_f =]0,\infty[$

Ejemplo 5

Considérese la función $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- Graficar f .
- Calcular el dominio y el rango de f .

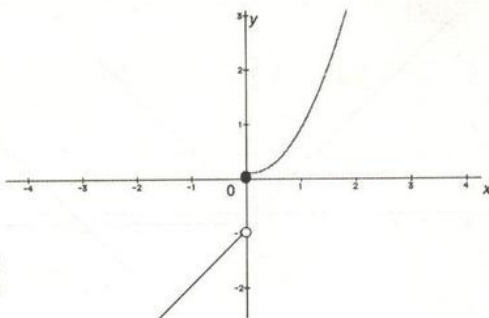
Solución

- Se grafica cada una de las partes que definen a la función f .

$x < 0$	-2	-1	0
$f(x) = x - 1$	-3	-2	-1

$x \geq 0$	0	1	2
$f(x) = x^2$	0	1	4

La pareja $(0, -1)$ de la primera tabla, se calcula pero se deja un hueco en la gráfica porque $x < 0$ para $f(x) = x - 1$.

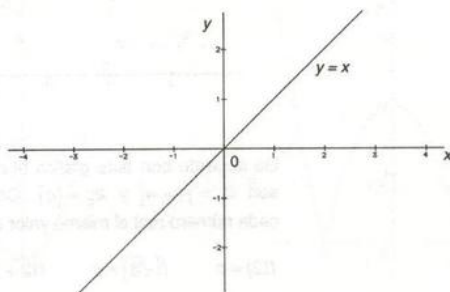


b) Tomando en cuenta la gráfica de f , se tiene que:

- Como $\ell_x \cap \mathcal{G}_f \neq \emptyset$ para todo x en $]-\infty, \infty[$ del eje x , entonces $\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[$.
- Dado que $\ell_y \cap \mathcal{G}_f \neq \emptyset$ para todo x en $]-\infty, -1[\cup [0, \infty[$ del eje y , y $\ell_y \cap \mathcal{G}_f = \emptyset$ para todo x en $[-1, 0[$, entonces $\mathcal{R}_f =]-\infty, -1[\cup [0, \infty[$.

La función idéntica o identidad es la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x$.

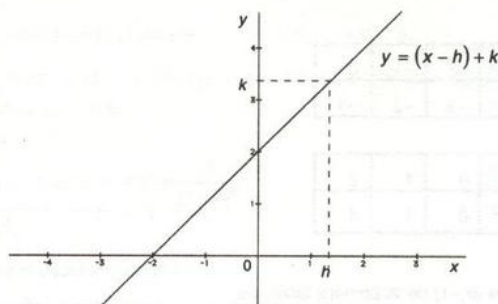
La gráfica de la función idéntica es como sigue



De acuerdo con esta gráfica el dominio y el rango de $f(x) = x$ son

$$\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[\text{ y } \mathcal{R}_f =]-\infty, \infty[$$

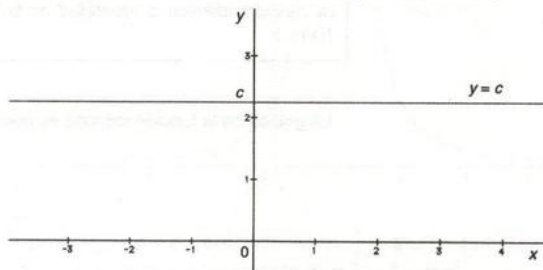
La función idéntica también se expresa como $y = x$ lo cual es un caso particular de la relación $y - k = x - h$ cuya gráfica es



Esta gráfica es la traslación de la gráfica de la función idéntica al punto (h, k) desde el origen $(0, 0)$.

Una *función constante* es una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = c$ en donde c es una constante

La gráfica de una función constante $f(x) = c$ es una recta paralela al eje x por el punto c del eje y como se muestra enseguida (para $c > 0$).

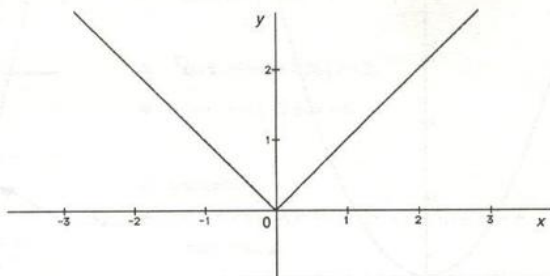


De acuerdo con esta gráfica el dominio y el rango de la función $f(x) = c$ son $\mathcal{D}_c =]-\infty, \infty[$ y $\mathcal{R}_c = \{c\}$. Como puede verse esta función asocia a cada número real el mismo valor c . Así

$$f(2) = c \quad f(\sqrt{3}) = c \quad f(2+h) = c \quad f\left(\frac{1}{1-a}\right) = c, \quad (a \neq 1)$$

La función *valor absoluto* es una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = |x|$

La gráfica de la función valor absoluto es como sigue



El dominio y el rango de esta función son $\mathcal{D}_{|x|} =]-\infty, \infty[$ y $\mathcal{R}_{|x|} = [0, \infty[$

Para esta función se tiene

$$f(-2) = |-2| = 2, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \quad f(3+h) = |3+h| = \begin{cases} 3+h & \text{si } h \geq -3 \\ -3-h & \text{si } h < -3 \end{cases}$$

Nota

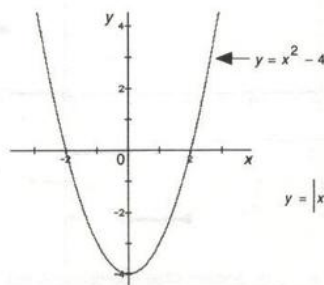
Si se ponen las barras de valor absoluto a la expresión en x que define a una función $y = f(x)$; se obtiene una nueva función cuya gráfica refleja respecto al eje x la parte negativa de la gráfica de la función original.

Ejemplo 6

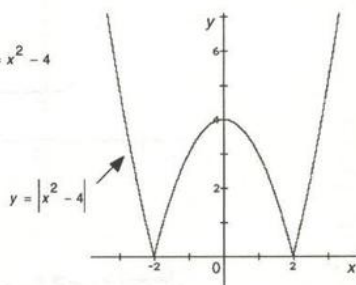
Graficar $y = |x^2 - 4|$

Solución

Sin barras:



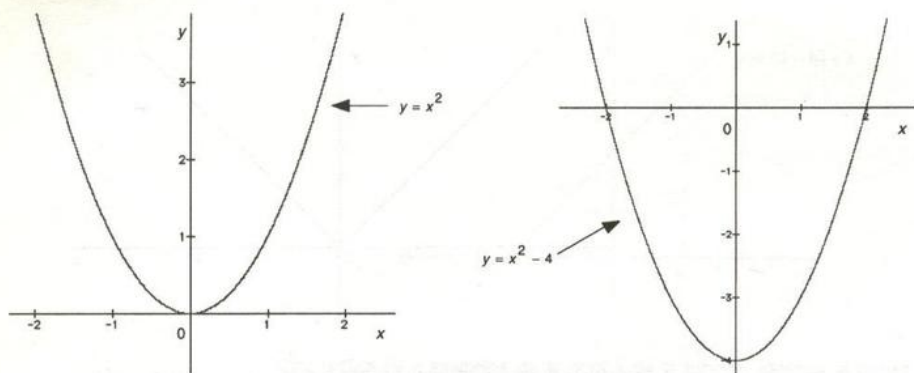
Con barras:



$$\mathcal{D}_{x^2-4} =]-\infty, \infty[\text{ y } \mathcal{R}_{x^2-4} = [-4, \infty[\quad \mathcal{D}_{|x^2-4|} =]-\infty, \infty[\text{ y } \mathcal{R}_{|x^2-4|} = [0, \infty[$$

Nota

La gráfica de $y = x^2 - 4$ o $y + 4 = (x - 0)^2$ es la traslación de la gráfica de $y = x^2$ o $y - 0 = (x - 0)^2$ al punto $(0, -4)$ desde el origen $(0, 0)$ como se muestra enseguida

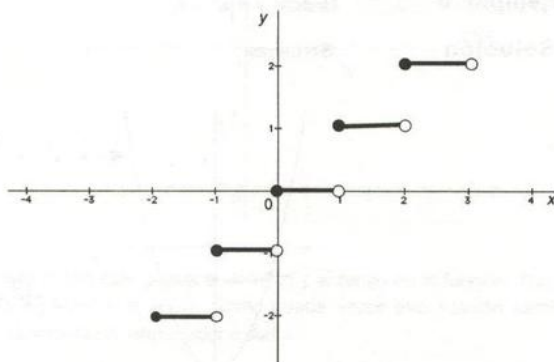


La función máximo entero es la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida así

$$f(x) = [x] = \text{mayor entero menor o igual que } x.$$

en donde $[x]$ se lee "parte entera de x "

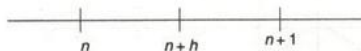
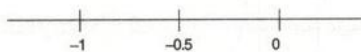
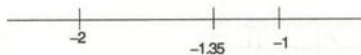
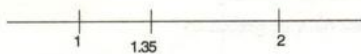
La gráfica de esta función es como sigue



De acuerdo con esta gráfica se tiene que

$$\mathcal{D}_{[x]} =]-\infty, \infty[\text{ y } \mathcal{R}_{[x]} = \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Para esta función f se tiene



$$\bullet f(1.35) = [1.35] = 1.$$

$$\bullet f(-1.35) = [-1.35] = -2.$$

$$\bullet f(-0.5) = [-0.5] = -1.$$

En general:

$$\bullet 0 < h < 1 \Rightarrow n < n+h < n+1 \Rightarrow [n+h] = n \quad \text{para todo } n \text{ en } \mathbb{Z}.$$

$$\bullet f(n) = [n] = n \text{ para todo entero } n.$$

$$\bullet f(a) = [a] = n \text{ si } n < a < n+1 \text{ para algún entero } n.$$

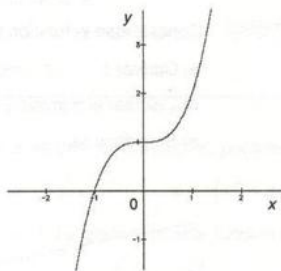
Una *función polinomial* de grado n es una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida así

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

en donde n es un entero no negativo y $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ son números reales con $a_n \neq 0$.

Ejemplo 7

La función $f(x) = x^3 + 1$ es una función polinomial de grado 3. Su gráfica es así



De acuerdo con esta gráfica, $\mathcal{D}_{x^3+1} = \mathcal{R}_{x^3+1} =]-\infty, \infty[$.

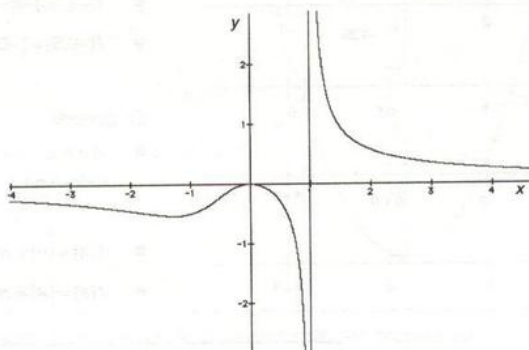
Una *función racional* es una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

en donde p y q son funciones polinomiales con $q(x) \neq 0$.

Ejemplo 8

$f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$ es una función racional y su gráfica es



De acuerdo con esta gráfica, se tiene que

$$\mathcal{D}_f =]-\infty, 1[\cup]1, \infty[\text{ y } \mathcal{R}_f =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$$

Una *función algebraica* es una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante una expresión que involucra operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y/o extracción de raíces

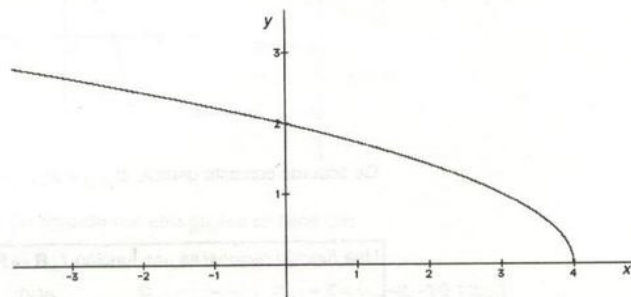
Ejemplo 9

Considérese la función algebraica $f(x) = \sqrt{4-x}$

- Graficar f .
- Calcular el dominio y el rango de f .

Solución

- Su gráfica es



- De acuerdo con la gráfica, $\mathcal{D}_f =]-\infty, 4]$ y $\mathcal{R}_f = [0, \infty[$

Una función f es *función par* si

$$f(-x) = f(x)$$

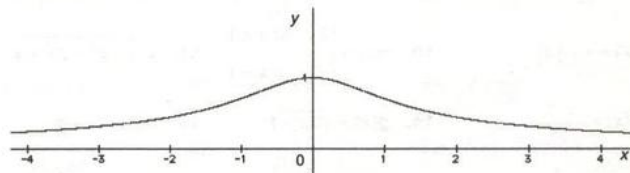
para todo x en su dominio $\mathcal{D}_f$

Ejemplo 10

La función algebraica $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ es una función par, porque:

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(x)$$

Su gráfica es



Nótese que la gráfica de esta función es simétrica respecto al eje y . Esto, es una propiedad que tiene toda función par.

De acuerdo con la gráfica se tiene que, $\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[$ y $\mathcal{R}_f =]0, 1]$

Una función f es *función impar* si

$$f(-x) = -f(x)$$

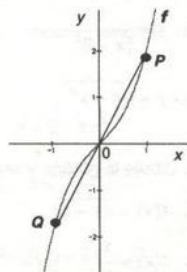
para todo x en su dominio $\mathcal{D}_f$

Ejemplo 11

La función $f(x) = x^3 + x$ es una función impar, porque:

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$$

para todo x en $\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[$. La gráfica de esta función es



Nótese que para todo punto P en la gráfica de f existe un punto Q en dicha gráfica el cual es simétrico de P respecto al origen. Ello significa que la gráfica de f es simétrica respecto al origen. Esta propiedad la tiene toda función impar.

Ejercicios 3.2

En los ejercicios del 1 al 20, determine el dominio máximo de cada función.

1. $f(x) = \frac{1}{x}$

2. $y = \frac{2}{x^2 - 1}$

3. $v = \sqrt{t^2 - 4}$

4. $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 2x - 15}$

5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

6. $y = |x| + |x - 2|$

7. $y = [x - 1]$

8. $h(x) = [x] + 3$

9. $g(x) = x - [x]$

10. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

11. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$

12. $y = \frac{x}{|x|}$

13. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

14. $g(x) = \sqrt{3x - 1}$

15. $h(x) = |x + 1|$

16. $y = |x| - 3$

17. $f(x) = \frac{1}{|x| - 2}$

18. $g(x) = \frac{1}{|x - 1|}$

19. $y = \frac{x + 1}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$

20. $y = \frac{1}{[x]}$

En los ejercicios del 21 al 40, grafique cada función.

21. $y = x^2$

22. $y = |x - 1|$

23. $y = (x + 2)^2$

24. $y = \frac{1}{x + 2}$

25. $y = \frac{1}{x - 4} + 3$

26. $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}$

27. $g(x) = \sqrt{x + 3} - 1$

28. $y = |x^2 - 1|$

29. $h(x) = x^3$

30. $f(x) = x^3 - 3$

31. $y = (x - 1)^3$

32. $y = (x + 2)^3 - 1$

33. $g(x) = \sqrt{x + 2} - 3$

34. $y = |x + 1| + 2$

35. $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$

36. $y = |x||x - 2|$

37. $y = |x| + [x]$

38. $y = [x^2]$

39. $f(x) = [x - 3]$

40. $h(x) = [x] + 1$

Del 41 al 52, determine el rango de cada función.

41. $y = |x^2 - 5|$

42. $y = |x| + 3$

43. $f(x) = \sqrt{x + 2} - 4$

44. $g(x) = \frac{2x - 7}{x - 4}$

45. $h(x) = \frac{1}{x^2}$

46. $y = \frac{1}{(x - 1)^2}$

47. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$

48. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq -3 \\ x^2 & \text{si } x > -3 \end{cases}$

49. $f(x) = |x| + |x - 3|$

50. $y = \sqrt{4 - x^2}$

51. $y = \sqrt{x^2 - x}$

52. $y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$

En los ejercicios del 53 al 93, Dibuje la gráfica y encuentre el dominio y el rango de cada función.

53. $f(x) = 5 - x^2$

54. $f(x) = \sqrt{x - 2}$

55. $f(x) = |x + 1| + 2$

56. $f(x) = \sqrt{(x + 1)^{-1}}$

57. $f(x) = [x - 1]$

58. $f(x) = \frac{1}{x}$

59. $g(x) = x^3 - 2x$

60. $h(x) = \frac{2}{x - 1}$

61. $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

62. $h(x) = x + \frac{1}{x}$

63. $x = \frac{y-1}{y+1}$

64. $y = |x-3| + |x-1|$

65. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

66. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

67. $y = x\sqrt{x+3}$

68. $|y-2| = |x-1|$

69. $y = \left| \frac{x-1}{x+2} \right|$

70. $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$

71. $y = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$

72. $y = [x-2]$

73. $y = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \neq 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

74. $y = \begin{cases} x & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$

75. $y = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \geq -3 \\ -2 & \text{si } x < -3 \end{cases}$

76. $y = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 3 \\ 0 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

77. $y = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

78. $y = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1 \\ [x] & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 2 & \text{si } 4 < x \end{cases}$

79. $y = \frac{[x]}{|x|}$

80. $y = \frac{x}{|x|}$

81. $y = |x| + 2x$

82. $y = -|x+2|$

83. $y = |x| - x$

84. $y = \frac{1}{|x|}$

85. $y = |x-2|$

86. $y = \frac{1}{(1+x)^2}$

87. $y = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

88. $f(x) = |x| + 4$

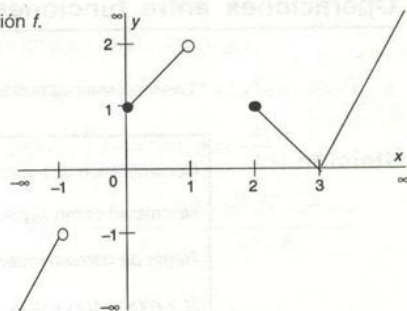
89. $f(x) = 3 - \sqrt{x}$

90. $f(x) = \frac{1}{|x-4|}$

91. $f(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$

92. $g(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+x}}$

93. $h(x) = \sqrt{x-2} - 4$

94. En la ilustración adjunta está la gráfica de una función f .¿Cuál es el dominio y el rango de esta función f ?

En los ejercicios del 95 al 112, diga si la función es par, impar o ninguna de las dos cosas (justifique su respuesta.)

95. $y = x^3 - x$

96. $y = 2x^5 - x^3 + x$

97. $y = 9 - 4x^2$

98. $f(x) = x^3 + x^2$

99. $g(x) = \sqrt[3]{x}$

100. $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ t-2 & \text{si } t > 0 \end{cases}$

101. $s = \frac{t-1}{t+1}$

102. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

103. $y = |x| - 4$

104. $f(x) = 0$, para cada x

105. $f(x) = 2x - \sqrt{3}$

106. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

107. $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

108. $y = [x]$

109. $f(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}$

110. $f(x) = x(1 - x^2)$

111. $y = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x \neq 3 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

112. $y = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

113. $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

114. ¿El producto de dos funciones pares es par?

115. ¿El producto de dos funciones impares es impar?

116. ¿El producto de función par por función impar, es par o impar?

117. Si f y g son funciones impares, ¿ $f + g$ y $f - g$ son impares?118. Si f y g son funciones impares, ¿ $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ son pares?119. ¿ $g(x) = f(x) + f(-x)$ es par?120. ¿ $h(x) = f(x) - f(-x)$ es impar?121. Dada una función f , encuentre dos funciones g y h tales que g sea par y $f = g - h$

122. Dé un ejemplo de una función que sea par e impar.

123. Dada una función f , encuentre dos funciones g y h tales que una de ellas sea impar y $f = g + h$

3.3

Operaciones entre funciones

Las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir como sigue:

Definición

Considérense dos funciones f y g . Las funciones $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ se definen como sigue

Regla de correspondencia:

Dominio:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\mathcal{D}_{f-g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\mathcal{D}_{f \cdot g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

$$\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} = \{x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g : g(x) \neq 0\}$$

Ejemplo 1

Si $f(x) = x^3 - 2$, $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = x^2 - x$, entonces

a) Calcular $(f \cdot g)(4)$, $(f + g - h)(3)$, $\left(\frac{2h-f}{g}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$ y $f^2(1)$

- b) Dar la regla de correspondencia y el dominio de $f + g$, $\frac{h}{g}$, $f + 2hg$ y

$$f \cdot g - \frac{h}{f}$$

Solución

$$a) (f \cdot g)(4) = f(4) \cdot g(4) = (4^3 - 2)(\sqrt{4}) = (62)(2) = 124$$

$$(f + g - h)(3) = f(3) + g(3) - h(3) = 25 + \sqrt{3} - 6 = 19 + \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2h-f}{g}\right)\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{(2h-f)\left(\frac{1}{4}\right)}{g\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{2h\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)}{g\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{2\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 2}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{64} + 2}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{103}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{103}{32} \end{aligned}$$

$$f^2(1) = (f \cdot f)(1) = f(1) \cdot f(1) = (-1)(-1) = 1$$

$$b) (f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^3 - 2) + \sqrt{x} = x^3 + \sqrt{x} - 2$$

$$\left(\frac{h}{g}\right)(x) = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - x}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} (f + 2hg)(x) &= f(x) + (2hg)(x) = f(x) + 2h(x) \cdot g(x) \\ &= x^3 - 2 + 2(x^2 - x)(\sqrt{x}) = x^3 + 2x^2\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(f \cdot g - \frac{h}{f}\right)(x) &= (f \cdot g)(x) - \left(\frac{h}{f}\right)(x) = f(x) \cdot g(x) - \frac{h(x)}{f(x)} \\ &= (x^3 - 2)\sqrt{x} - \frac{x^2 - x}{x^3 - 2} = \frac{(x^3 - 2)^2 \sqrt{x} - x^2 + x}{x^3 - 2} \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbf{R} : f(x) \in \mathbf{R}\} = \{x \in \mathbf{R} : x^3 - 2 \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$$

$$\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbf{R} : g(x) \in \mathbf{R}\} = \{x \in \mathbf{R} : \sqrt{x} \in \mathbf{R}\} = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\} = [0, \infty[$$

$$\mathcal{D}_h = \{x \in \mathbf{R} : h(x) \in \mathbf{R}\} = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$$

Entonces

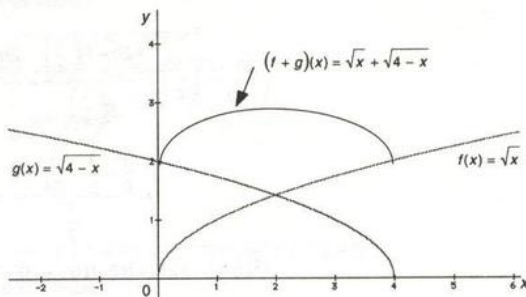
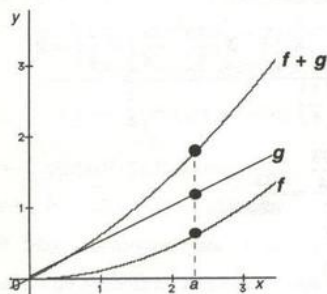
$$\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = \mathbf{R} \cap [0, \infty[= [0, \infty[$$

$$\mathcal{D}_{\frac{h}{g}} = \{x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g : g(x) \neq 0\} = \{x \in [0, \infty[: \sqrt{x} \neq 0\} =]0, \infty[$$

$$\mathcal{D}_{f+2hg} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_{2hg} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_g = \mathbf{R} \cap \mathbf{R} \cap \mathbf{R} \cap [0, \infty[= [0, \infty[$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{f+g} &= \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = \{x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g : f(x) \neq 0\} \\ &= [0, \infty[\cap \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2 \neq 0\} = [0, \sqrt[3]{2}[\cup]\sqrt[3]{2}, \infty[\end{aligned}$$

Las ilustraciones que siguen, muestran cómo se obtiene la gráfica de $f + g$ a partir de las gráficas de f y g .



Además de las cuatro operaciones anteriores se tiene la *composición* de funciones la cual se define enseguida

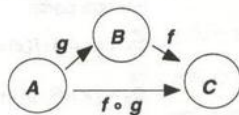
Definición

Considérense dos funciones f y g . La *función composición* $f \circ g$ se lee "f círculo g" o "f composición g" o "g seguida de f" y se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

y su dominio es $\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : g(x) \in \mathcal{D}_f\}$

La composición de las funciones $g: A \rightarrow B$ y $f: B \rightarrow C$ se ilustra enseguida



La composición de funciones se le encuentra con frecuencia en muchos problemas físicos. Observe:

Ejemplo 2

La longitud ℓ de una varilla de acero corrugado depende de la temperatura T ; o sea ℓ es una función de T lo cual se expresa como $\ell = g(T)$. Pero la temperatura T depende del tiempo t , es decir T es una función de t lo cual se expresa como $T = f(t)$. Por lo que

$$\ell = g(T) = g(f(t)) = (g \circ f)(t)$$

Ejemplo 3

Considérense las funciones $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y $g(x) = 2x - 3$

- a) Calcular $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right)$ y $(g \circ f)(3)$
- b) Obtener las reglas de correspondencia que definen a las funciones $f \circ g$, $g \circ f$ y $f \circ f \circ g$
- c) Calcular $\mathcal{D}_{f \circ g}$ y $\mathcal{D}_{g \circ f}$

Solución

$$a) (f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(-2) = -\frac{1}{3}, \quad (g \circ f)(3) = g(f(3)) = g\left(\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$b) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 3) = \frac{1}{2x - 3 - 1} = \frac{1}{2x - 4}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = 2\left(\frac{1}{x-1}\right) - 3 = \frac{5-3x}{x-1}$$

$$(f \circ f \circ g)(x) = f(f(g(x))) = f\left(\frac{1}{2x-4}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2x-4} - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{1+4-2x}{2x-4}} = \frac{2x-4}{5-2x}$$

$$c) \mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x-1} \in \mathbb{R}\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} =]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$$

$$\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

Entonces

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 3 \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$$

$$=]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$$

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \left\{x \in]-\infty, 1[\cup]1, \infty[: \frac{1}{x-1} \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \{x \in]-\infty, 1[\cup]1, \infty[: x \neq 1\} =]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$$

Nota

En casos particulares como las funciones del ejemplo anterior, $\mathcal{D}_{f \circ g}$ puede calcularse también así

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} : (f \circ g)(x) \in \mathbb{R}\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2x-4} \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : 2x - 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} =]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$$

Esta técnica no siempre funciona en la composición de funciones. Por ejemplo si $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y $g(x) = \frac{x+1}{x}$, entonces $(f \circ g)(x) = x, y$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{f \circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g : g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \neq 0 : x+1 \neq x\} \\ &= \{x \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\mathcal{D}_{f \circ g} \neq \{x \in \mathbb{R} : (f \circ g)(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

Ejemplo 4

Considérense las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -2 \\ 2x & \text{si } x \geq -2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{3} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcular:

a) $(f \circ g)\left(-\frac{5}{2}\right), (f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right), (g \circ f)(-1), (g \circ f)\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $(f \circ g)(x)$

c) $\mathcal{D}_{f \circ g}$

Solución

$$a) (f \circ g)\left(-\frac{5}{2}\right) = f\left(g\left(-\frac{5}{2}\right)\right) = f\left(\frac{2\left(-\frac{5}{2}\right)-1}{3}\right) = f(-2) = 2(-2) = -4$$

$$(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = f(2) = 2(2) = 4$$

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(-2) = \frac{2(-2)-1}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$(g \circ f)\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = g(1) = 1$$

b) Recuerdese que $\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : g(x) \in \mathcal{D}_f\}$. Así que

$$x \in \mathcal{D}_{f \circ g} \Rightarrow x \in \mathcal{D}_g =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[\Rightarrow x \leq 0 \text{ o } x > 0.$$

Entonces:

1. $x \leq 0 \Rightarrow g(x) = \frac{2x-1}{3}$. Además:

$$x \leq 0 \Rightarrow 2x \leq 0 \Rightarrow 2x-1 \leq -1 \Rightarrow \frac{2x-1}{3} \leq -\frac{1}{3}$$

Es decir, $x \leq 0 \Rightarrow g(x) = \frac{2x-1}{3} \leq -\frac{1}{3}$. De donde, comparando con el -2 de la definición de f se obtiene que

$$x \leq 0 \Rightarrow g(x) = \frac{2x-1}{3} \leq -2 \text{ o } -2 \leq g(x) = \frac{2x-1}{3} \leq -\frac{1}{3}$$

Por lo tanto para $x \leq 0$ en el dominio $\mathcal{D}_g$ se tiene que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2x-1}{3}\right) = \begin{cases} \left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 & \text{si } \frac{2x-1}{3} < -2 \\ 2\left(\frac{2x-1}{3}\right) & \text{si } -2 \leq \frac{2x-1}{3} \leq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Resolviendo las desigualdades se tiene

$$\frac{2x-1}{3} < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}, \quad -2 \leq \frac{2x-1}{3} \leq -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x \leq 0$$

Por lo que

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 & \text{si } x < -\frac{5}{2} \\ \frac{4x-2}{3} & \text{si } -\frac{5}{2} \leq x \leq 0 \end{cases}$$

2. $x > 0 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x} > 0 > -2$. De donde, para $x > 0$ se tiene que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = 2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$$

Entonces la regla de correspondencia que define a $f \circ g$ es

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 & \text{si } x < -\frac{5}{2} \\ \frac{4x-2}{3} & \text{si } -\frac{5}{2} \leq x \leq 0 \\ \frac{2}{x} & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

$$c) \mathcal{D}_{f \circ g} = \left] -\infty, -\frac{5}{2} \right[\cup \left[-\frac{5}{2}, 0 \right] \cup]0, \infty[= \mathbb{R}$$

Ejemplo 5

Encontrar dos funciones f y g tales que $f \circ g = h$ en donde h está definida como $h(x) = \sqrt{x-1}$

Solución

Definanse las funciones f y g así

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x-1$$

Entonces $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = \sqrt{x-1} = h(x)$

Ejercicios 3.3

En los ejercicios del 1 al 10, para las funciones f y g dadas, defina las funciones $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g \circ f$, $g \circ f \circ g$, g^4 y determine su dominio.

- $f(x) = x+2$, $g(x) = x-5$
- $f(x) = 2x-3$, $g(x) = \frac{x+3}{2}$
- $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \frac{x+1}{x}$
- $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 1-x^2$
- $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$
- $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$, $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$
- $f(x) = |x|$, $g(x) = |x-2|$
- $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
- $f(x) = \sqrt{x^2-4}$, $g(x) = \sqrt{x+4}$
- $f(x) = x^2-1$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$

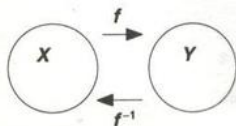
11. Considere las funciones $g(x) = 1-x$ y $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ y calcule $(f+g)(x)$, $(f \circ g)(x)$, $(f \circ g)(0)$,

$\mathcal{D}_{f+g}$ y $\mathcal{D}_{f \circ g}$

12. Considere las funciones $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y calcule $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$,

$(f \circ g)(1)$, $\mathcal{D}_{f \circ g}$ y $\mathcal{D}_{g \circ f}$.

13. Considere $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = x-1$ y calcule $(f \circ g \circ h)(-1)$, $(f \circ g \circ h)(x)$ y $\mathcal{D}_{f \circ g \circ h}$
14. Encuentre dos funciones f y g para las cuales $(f \circ g)(x) = h(x) = |x^2 - 4|$
15. Encuentre una función f para la cual $(f \circ g)(x) = h(x)$ con $g(x) = 2x-1$ y $h(x) = (2x-1)^{1/3}$
16. Encuentre dos funciones f y g tales que $f \circ g \neq g \circ f$. De ello se deduce que la composición de funciones no es conmutativa.
17. Demostrar que la composición de funciones es asociativa. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
18. Considere las funciones $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \leq 0 \\ x-1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \geq 1 \\ x-1 & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$ y calcule $(f \circ g)(x)$

3.4**Inversa de una función**

Para definir la función $f^{-1}: Y \rightarrow X$ inversa de una función $f: X \rightarrow Y$, se requiere definir los siguientes tipos de funciones

Definición 1

Considérese una función $f: X \rightarrow Y$

1. f es *uno a uno* o *inyectiva* si para cada x_1 y x_2 en X se cumple cualquiera de las siguientes condiciones

- a) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- b) $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

2. f es *sobre* o *suprayectiva* si satisface cualquiera de las siguientes condiciones

- a) Para cada y en Y existe x en X tal que $f(x) = y$
- b) $Y = \mathcal{R}_f$

3. f es *biyectiva* si es uno a uno y sobre

Ejemplo 1

Considérese la función $f: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ definida como $f(x) = \sqrt{x}$

a) f es uno a uno porque, para cada x_1 y x_2 en $[0, \infty[$ se cumple que

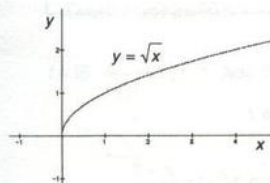
$$\begin{aligned} \bullet \quad f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow (\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2})^2 \\ &\Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

O bien, porque se cumple que

$$\bullet \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = \sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2} = f(x_2)$$

b) f es sobre porque $\mathcal{R}_f = [0, \infty[$.

c) f es biyectiva porque es uno a uno y sobre

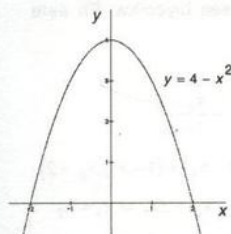
**Ejemplo 2**

Considérese la función $f: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, 4]$ definida como $f(x) = 4 - x^2$

a) f no es uno a uno, porque $-2 \neq 2$ y $f(-2) = 0 = f(2)$

b) f es sobre porque $\mathcal{R}_f =]-\infty, 4]$

c) f no es biyectiva porque no es inyectiva (uno a uno)



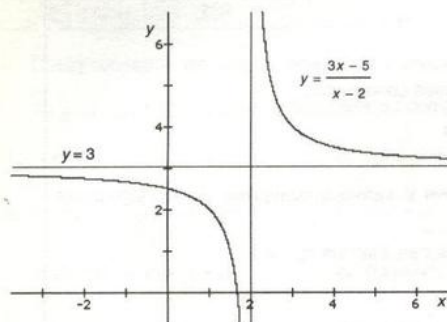
Gráficamente:

1. Una función f uno a uno se caracteriza por el hecho de que, toda recta horizontal corta la gráfica de f a lo más en un punto.

2. Una función $f: X \rightarrow Y$ sobre se caracteriza por el hecho de que, cada recta horizontal por un punto y en Y corta la gráfica de f al menos en un punto.

Ejemplo 3

Considérese la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$



a) f es uno a uno porque, cada recta horizontal corta la gráfica de f a lo más en un punto.

b) f no es sobre porque, la recta horizontal $y = 3$ no corta a la gráfica de f .

c) f no es biyectiva porque no es sobre.

Definición 2

Considérese una función biyectiva $f: X \rightarrow Y$. La función inversa de f , denotada por $f^{-1}: Y \rightarrow X$ se define como

$$f^{-1}(y) = x \text{ si } f(x) = y$$

Nota

El -1 en este caso no actúa como exponente; o sea, $f^{-1}(y) \neq \frac{1}{f(y)}$. El -1 sólo denota la aplicación de la función inversa de f .

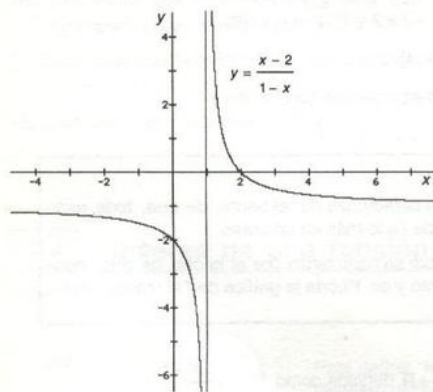
Ejemplo 4

Considérese $f: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, -1[\cup]-1, \infty[$ definida con $f(x) = \frac{x-2}{1-x}$

a) ¿Existe f^{-1} ?

b) Si f^{-1} existe, obténgase su regla de correspondencia.

Solución



a) f^{-1} existe siempre que f sea biyectiva. En este caso:

• f es uno a uno porque:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{x_1-2}{1-x_1} = \frac{x_2-2}{1-x_2} \\ &\Rightarrow (x_1-2)(1-x_2) = (1-x_1)(x_2-2) \\ &\Rightarrow x_1 + 2x_2 = x_2 + 2x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

• f es sobre porque $\mathcal{R}_f =]-\infty, -1[\cup]-1, \infty[$.

Así que, f es biyectiva. Por lo tanto f^{-1} existe y es tal que $f^{-1}(y) = x$ si y sólo si $f(x) = y$

b) Como f^{-1} existe, entonces $f^{-1}(y) = x$ si $y = f(x)$
Pero

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{x-2}{1-x} \Rightarrow (1-x)y = x-2$$

$$\Rightarrow y - xy = x - 2 \Rightarrow xy + x = y + 2$$

$$\Rightarrow (y+1)x = y+2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{y+1}$$

Así que $f^{-1}(y) = \frac{y+2}{y+1}$ o en forma equivalente $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x+1}$ es la regla de correspondencia de f^{-1}

El siguiente teorema caracteriza a la función inversa de una función.

Teorema

Considérese una función $f: X \rightarrow Y$ y las funciones identidad

$$id_X: X \rightarrow X, id_Y: Y \rightarrow Y$$

- a) Si f^{-1} existe, entonces $f^{-1} \circ f = id_X$ y $f \circ f^{-1} = id_Y$
 b) Si existe $g: Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = id_X$ y $f \circ g = id_Y$, entonces g es la inversa de f .

Demostración

a) $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

Así que, $f^{-1} \circ f = id_X$ y $f \circ f^{-1} = id_Y$

- b) Se demostrará que f es biyectiva.

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

O sea, f es inyectiva.

- Si y está en Y , entonces existe $x = g(y)$ en X tal que

$$f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = y$$

Es decir, f es sobre.

Así que, f es biyectiva. De donde, existe $f^{-1}: Y \rightarrow X$ definida como

$$f^{-1}(y) = x \text{ si } f(x) = y$$

la cual por definición es inversa de f . Además por el inciso a) de esta demostración y por la asociatividad de la composición de funciones, se tiene que

$$g = g \circ id_Y = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = id_X \circ f^{-1} = f^{-1}$$

Ejemplo 5

Obtener y graficar la inversa de $f(x) = x^3$

Solución

$f(x) = x^3$ es una función biyectiva. Por lo tanto, f tiene una inversa la cual se obtiene como sigue:

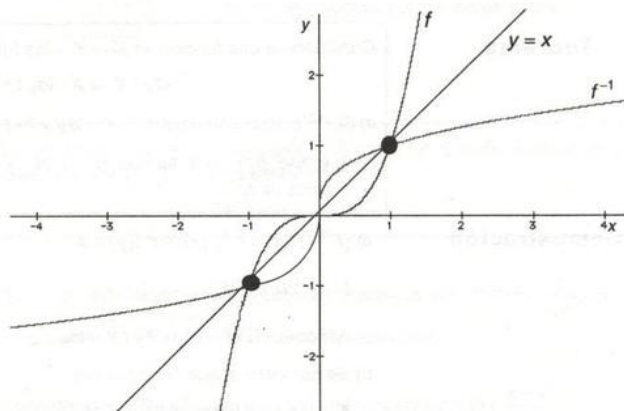
$$y = f(x) \Rightarrow y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} = f^{-1}(y)$$

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ es la inversa de f , porque:

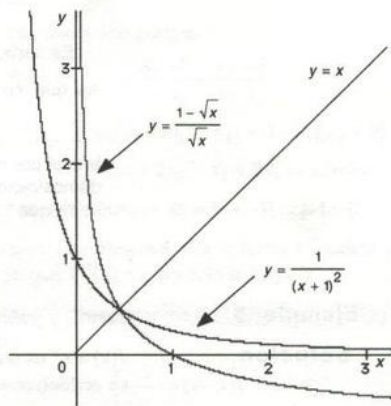
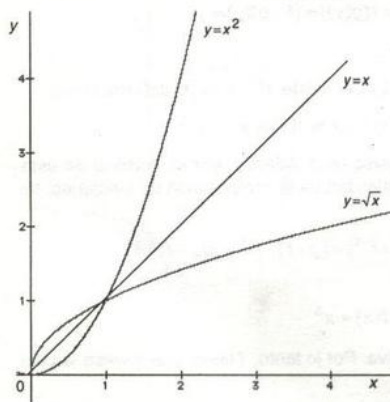
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$$

O sea, $f^{-1} \circ f = id_R$ y $f \circ f^{-1} = id_R$. La gráfica de f^{-1} es así



Nótese que cada una de las gráficas de f y f^{-1} es la reflexión de la otra respecto a la recta $y = x$. Esto es un hecho de carácter general el cual será usado (sin demostración) para graficar una de las dos funciones a partir de la otra.



- Para $x \geq 0$, $y = \sqrt{x}$ es la reflexión de $y = x^2$ respecto a la recta $y = x$.
- Para $x \geq 0$, $y = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ es la reflexión de $y = \frac{1}{(x+1)^2}$ respecto a la recta $y = x$.

Ejercicios 3.4

En cada ejercicio del 1 al 23, analice si la función dada es uno a uno, sobre, biyectiva o nada de eso.

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$, $f(x) = |x|$
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$, $f(x) = |1 - x^2|$
4. $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$, $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$
5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$
6. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 2$
7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2$
8. $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$, $f(x) = \sqrt{x} - 1$
9. $g: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$
10. $h:]-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2 - \sqrt{1-x}$
11. $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$
12. $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$, $g(x) = \sqrt{|x-1|}$
13. $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$
14. $g: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, $g(x) = x^{4/3}$
15. $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
16. $f:]-\infty, 0] - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
17. $h: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
18. $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$, $f(x) = (1-x^3)^2$
19. $f:]0, 2[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{4x-x^3}$
20. $h: \mathbb{R} - [-1, 1] \rightarrow [0, \infty[$, $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
21. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$
22. $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ [x-1] - x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -\sqrt{x} - 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$
23. $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, 1]$, $f(x) = [x+1] - x$

En cada ejercicio del 24 al 43, defina la inversa de la función dada en caso de que exista.

24. $f(x) = x - 1$
25. $f(x) = |x+2|$
26. $f(x) = x^3$
27. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$
28. $f(x) = (x-1)^2$, $x \geq 1$
29. $f(x) = (x+2)^3$
30. $h(t) = \frac{1+t}{2-t}$, $t > 2$
31. $g(u) = \frac{u+2}{3}$
32. $y = \sqrt[3]{1+x}$
33. $y = \sqrt[3]{x+1}$
34. $y = x^2 + 1$, $x \geq 0$
35. $y = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x > -1 \\ x+1 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$

36. $f(x) = 4x - 5$

37. $f(x) = 8x^3 - 4$

38. $f(x) = 9 - 2x$

39. $f(x) = \frac{1+x}{x}, x > 0$

40. $f(x) = \sqrt{1-4x^2}, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

41. $f(x) = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$

42. $f(x) = \sqrt{2x-x^2}, 1 \leq x \leq 2$

43. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}, x \geq 1$

En cada ejercicio del 44 al 50, demuestre la proposición para las funciones $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$

44. Si f y g son uno a uno, entonces $f \circ g$ es uno a uno.

45. Si f y g son sobres, entonces $f \circ g$ es sobre.

46. Si f y g son biyectivas, entonces $f \circ g$ es biyectiva.

47. Si $f \circ g$ es uno a uno, entonces g es uno a uno.

48. Si $f \circ g$ es sobre, entonces f es sobre.

49. Si f y g son biyectivas, entonces $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

50. Si $g \circ f = id_X$, entonces f es uno a uno y g es sobre.

3.5 Funciones trigonométricas

Medidas de ángulos

Para medir ángulos, los griegos dividieron la circunferencia en 360 partes iguales, cada una de ellas corresponde a 1° (un grado). Es decir:

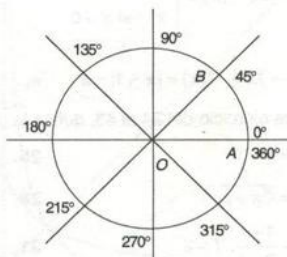
Un *grado* es la medida de un ángulo que subtiende la $\frac{1}{360}$ parte de cada circunferencia con centro en el vértice de dicho ángulo

Ejemplo 1

El ángulo central AOB de la figura adjunta subtiende $\frac{1}{8}$ parte de la circunferencia por lo que su medida es

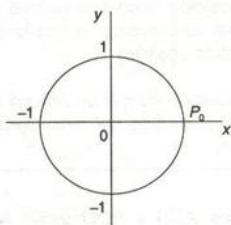
$$\begin{aligned} m\angle AOB &= \frac{1}{8} \text{ de } 360^\circ \\ &= \frac{1}{8} \times 360^\circ \\ &= 45^\circ \end{aligned}$$

se lee "medida en grados del ángulo A,O,B"



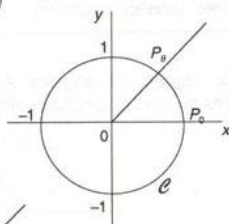
En cálculo los ángulos se miden en *radianes*. Para definir radian y medir con esta unidad los ángulos se usa una función especial la cual se describe enseguida.

Considérese el círculo unitario $\mathcal{C}$ con centro en el origen en el plano- xy . De hecho $\mathcal{C} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Considérese además la función $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ definida como sigue



1. Si $\theta = 0$, entonces $P_\theta = P(\theta) = P(0) = P_0 = (1,0)$

2. Para $\theta > 0$, hay dos casos:



- Si $0 < \theta \leq 2\pi$, entonces $P(\theta) = P_\theta$ en donde P_θ es el punto sobre $\mathcal{C}$ que se obtiene al girar respecto al origen y en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj el punto $P_0 = (1,0)$ de modo que $\text{arc} P_0 P_\theta = \theta$ ($\text{arc} P_0 P_\theta$ denota la longitud del arco de P_0 a P_θ sobre $\mathcal{C}$)

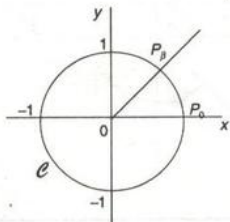
- Si $2\pi < \theta$, entonces existen únicos números reales no negativos α y β tales que

$$\frac{\theta}{2\pi} = \alpha + \frac{\beta}{2\pi} \text{ o bien } \theta = 2\pi\alpha + \beta$$

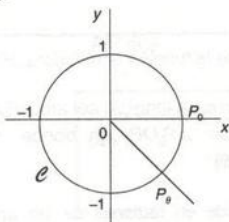
con $0 \leq \beta < 2\pi$. En cuyo caso

$$P_\theta = P(\theta) = P(\beta) = P_\beta$$

(β es el residuo que resulta al dividir θ entre 2π)



3. Para $\theta < 0$ hay también dos casos:



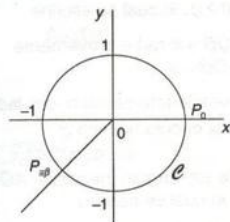
- Si $-2\pi \leq \theta < 0$, entonces $P(\theta) = P_\theta$ en donde P_θ es el punto sobre $\mathcal{C}$ que se obtiene al girar respecto al origen y en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj el punto $P_0 = (1,0)$ de modo que $\text{arc} P_0 P_\theta = |\theta|$

- Si $\theta < -2\pi$, entonces $-\theta > 2\pi$ por lo que existen únicos números reales no negativos α y β tales que

$$\frac{\theta}{-2\pi} = \frac{-\theta}{2\pi} = \alpha + \frac{\beta}{2\pi} \text{ o bien } \theta = -2\pi\alpha - \beta$$

con $0 \leq \beta < 2\pi$. En cuyo caso

$$P_\theta = P(\theta) = P(-\beta) = P_{-\beta}$$



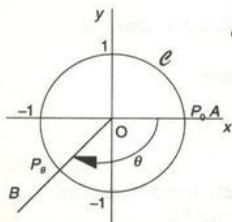
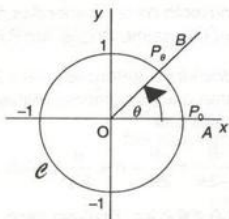
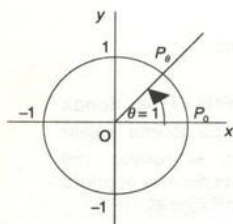
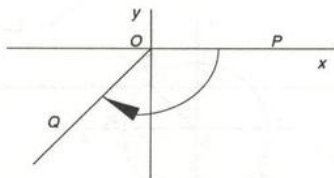
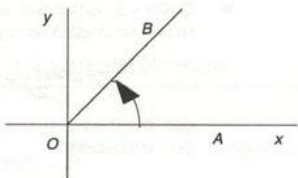
A esta función especial $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ que asocia a cada número real un punto sobre $\mathcal{C}$ se le llama *función enrolladora* o *de dar vueltas*.

Para medir ángulos con esta función, se consideran ángulos dirigidos (positivos o no positivos) en posición normal.

1. Un ángulo está en *posición normal* o *estándar* si tiene su vértice en el origen y su lado inicial coincide con la parte positiva del eje x
2. Un ángulo es *positivo* si su lado final en posición normal se obtuvo al girar alrededor del origen su lado inicial en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (sentido positivo)
3. Un ángulo es *negativo* si su lado final en posición normal se obtuvo al girar alrededor del origen su lado inicial en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj (sentido negativo)

Ejemplo 2

En las ilustraciones que siguen los ángulos AOB y POQ están en posición normal. $\angle AOB$ es positivo y $\angle POQ$ es negativo.



Considérese la función enrolladora $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$

1. Un *radián* es la longitud del arco P_0P_θ subtendido por el ángulo $\angle P_0OP_\theta$ en donde $\theta=1$, $P_0=P(0)$ y $P_\theta=P(\theta)$

2. La medida en radianes de un ángulo no negativo AOB es un número real $\theta \geq 0$, lo cual se escribe $\angle AOB = \theta$ radianes, $\angle AOB = \theta$ rad o brevemente $\angle AOB = \theta$

siempre que $P_\theta = P(\theta)$ sea la intersección del lado final de dicho ángulo con el círculo unitario $\mathcal{C}$

3. La medida en radianes de un ángulo negativo AOB es un número real $\theta < 0$, lo cual se escribe

$$\angle AOB = \theta \text{ radianes, } \angle AOB = \theta \text{ rad o brevemente } \angle AOB = \theta$$

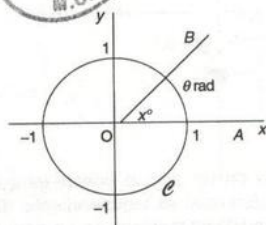
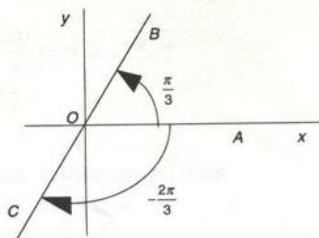
siempre que $P_\theta = P(\theta)$ sea la intersección del lado final de dicho ángulo con el círculo unitario $\mathcal{C}$

Ejemplo 3

En la figura adjunta:

$$\angle AOB = \frac{\pi}{3}$$

$$\angle AOC = -\frac{2\pi}{3}$$

**Relación entre grados y radianes**

Considérese el círculo unitario $\mathcal{C}$ con centro en el origen y un ángulo AOB en su posición normal con

$$m\angle AOB = x^\circ \text{ y } \angle AOB = \theta \text{ rad}$$

La relación entre grados ($^\circ$) y radianes (rad) se obtiene a partir de la siguiente proporción

$$\frac{x^\circ}{\theta \text{ rad}} = \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}}$$

en donde 2π es la longitud de la circunferencia unitaria. Simplificando se tiene

$$\frac{x}{\theta} = \frac{360}{2\pi}$$

Así que:

Teorema 1

Si las medidas de un ángulo son $m\angle AOB = x^\circ$ y $\angle AOB = \theta$ rad, entonces

$$x = \frac{180}{\pi} \theta, \quad \theta = \frac{\pi}{180} x$$

Nota

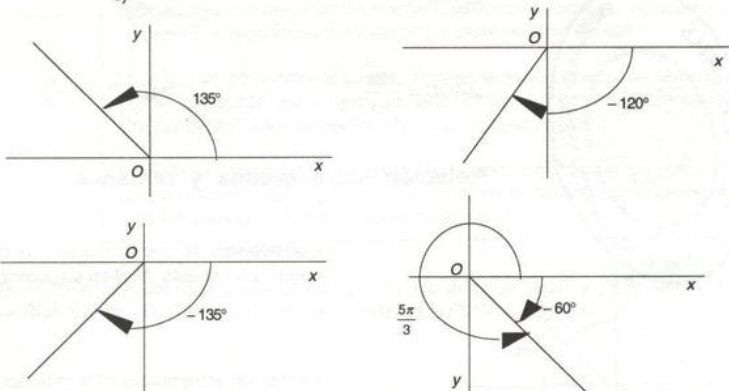
En lo sucesivo un ángulo $\angle AOB$ se denotará con una letra griega o con una de las últimas letras minúsculas del alfabeto y se omitirá el símbolo " $\angle$ ".

Ejemplo 4a) Convertir a radianes las medidas en grados $\alpha = 135^\circ$ y $\beta = -120^\circ$ b) Convertir a grados las medidas en radianes $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$ y $\beta = \frac{5\pi}{3}$ c) Representar en posición normal los ángulos α y β de los incisos anteriores.**Solución**

$$\text{a) } \alpha = \left(\frac{\pi}{180}\right)(135) = \frac{3\pi}{4}, \quad \beta = \left(\frac{\pi}{180}\right)(-120) = -\frac{2\pi}{3}$$

$$b) \alpha = \left(\frac{180}{\pi}\right)\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -135^\circ, \quad \beta = \left(\frac{180}{\pi}\right)\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 300^\circ$$

c)



En geometría plana, la medida en grados de un *ángulo central* (el que tiene su vértice en el centro de una circunferencia) es independiente del radio de la circunferencia. En cálculo, la medida en radianes de un ángulo central depende del radio de la circunferencia como se establece enseguida.

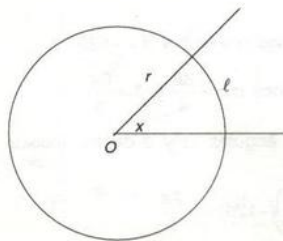
Teorema 2

La medida θ en radianes de un ángulo central y el radio r de la circunferencia con centro en el vértice del ángulo, se relacionan así

$$\theta = \frac{\ell}{r} \text{ o bien } \ell = r\theta$$

en donde ℓ es la longitud del arco que subtiende el ángulo en dicha circunferencia.

Demostración



Supóngase que el ángulo central mide x° y que su medida en radianes es θ . Por el teorema 1:

$$x = \frac{180}{\pi} \theta \quad (1)$$

Pero la longitud de la circunferencia de radio r es $2\pi r$, entonces

$$\frac{x^\circ}{\ell} = \frac{360^\circ}{2\pi r}$$

Despejando a x se tiene

$$x = \left(\frac{180}{\pi}\right) \frac{\ell}{r} \quad (2)$$

De las relaciones (1) y (2) se tiene

$$\frac{180}{\pi} \theta = \frac{180}{\pi} \frac{\ell}{r}$$

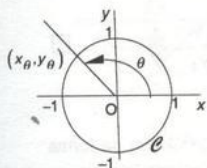
$$\text{De donde } \theta = \frac{\ell}{r}$$



Valores de las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas *seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante* y *cosecante* denotadas respectivamente como *sen*, *cos*, *tan*, *cot*, *sec* y *csc*, se definen a partir de la función enrolladora $P: \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{C}$ como sigue

Definición



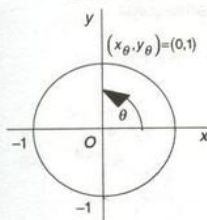
Si θ es un número real y $P(\theta) = (x_\theta, y_\theta)$ es la imagen de θ bajo la función enrolladora $P: \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{C}$, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= y_\theta & \tan \theta &= \frac{y_\theta}{x_\theta}, (x_\theta \neq 0) & \sec \theta &= \frac{1}{x_\theta}, (x_\theta \neq 0) \\ \cos \theta &= x_\theta & \cot \theta &= \frac{x_\theta}{y_\theta}, (y_\theta \neq 0) & \csc \theta &= \frac{1}{y_\theta}, (y_\theta \neq 0) \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Calcular el valor de cada función trigonométrica en $\theta = \frac{\pi}{2}$

Solución



Considérese la función enrolladora $P: \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{C}$. Entonces para $\theta = \frac{\pi}{2}$ se tiene que $P(\theta) = (x_\theta, y_\theta) = (0, 1)$, por lo que

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = y_\theta = 1$$

$$\cot \frac{\pi}{2} = \frac{x_\theta}{y_\theta} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos \theta = x_\theta = 0$$

$$\sec \frac{\pi}{2} = \frac{1}{x_\theta} = \frac{1}{0} \text{ (indefinido)}$$

$$\tan \frac{\pi}{2} = \frac{y_\theta}{x_\theta} = \frac{1}{0}, \text{ (indefinido)}$$

$$\csc \frac{\pi}{2} = \frac{1}{y_\theta} = \frac{1}{1} = 1$$

Teorema 3

Si $P = (x, y)$ es un punto del plano-xy en el lado final de un ángulo que mide θ rad; entonces los valores de las funciones trigonométricas en θ son

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y}$$

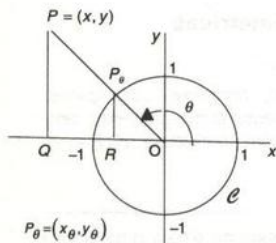
en donde r es la distancia de P al origen O ; o sea $r = PO = \sqrt{x^2 + y^2}$

Demostración

En la figura adjunta, los triángulos OPQ y $OP_\theta R$; son semejantes por lo que, sus lados correspondientes son proporcionales. Por lo que

$$y_\theta = \frac{y_\theta}{1} = \frac{P_\theta R}{P_\theta O} = \frac{PQ}{PO} = \frac{y}{r}, \text{ o sea } y_\theta = \frac{y}{r}$$

$$x_\theta = \frac{x_\theta}{1} = \frac{RO}{P_\theta O} = \frac{QO}{PO} = \frac{x}{r}, \text{ o sea } x_\theta = \frac{x}{r}$$



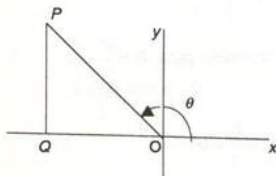
De donde, por definición se tiene que

$$\operatorname{sen} \theta = y_\theta = \frac{y}{r} \quad \tan \theta = \frac{y_\theta}{x_\theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} \quad \sec \theta = \frac{1}{x_\theta} = \frac{1}{\frac{x}{r}} = \frac{r}{x}$$

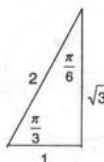
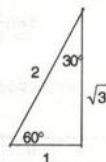
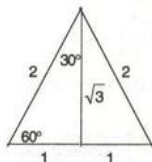
$$\cos \theta = x_\theta = \frac{x}{r} \quad \cot \theta = \frac{x_\theta}{y_\theta} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{y} \quad \csc \theta = \frac{1}{y_\theta} = \frac{1}{\frac{y}{r}} = \frac{r}{y} \quad \square$$

Nota

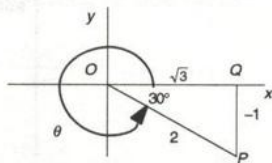
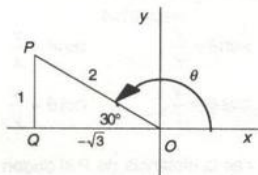
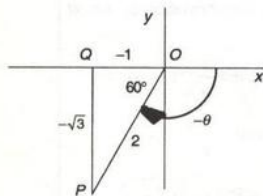
Considérese el ángulo POQ del triángulo rectángulo OPQ que se forma al trazar la perpendicular $\overline{PQ}$ al eje x desde un punto en el lado final de un ángulo θ en posición normal (véase figura adjunta). Entonces:



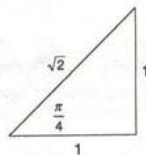
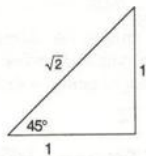
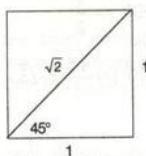
1. Si el ángulo POQ mide 30° o 60° , se da por hecho que el triángulo rectángulo OPQ está determinado por una de las alturas de un triángulo equilátero que mide 2 unidades por lado como se muestra enseguida



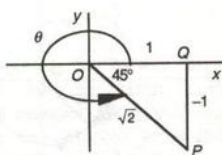
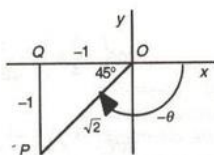
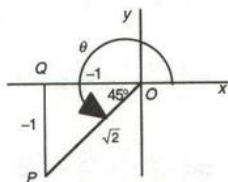
en donde el signo de las medidas 1 y $\sqrt{3}$ de los catetos depende de la posición del triángulo OPQ . Observe:



2. Si el ángulo POQ mide 45° , se da por hecho que el triángulo rectángulo OPQ está determinado por la diagonal de un cuadrado que mide 1 unidad por lado como se muestra enseguida



en donde el signo de la medida 1 de los catetos depende de la posición del triángulo OPQ . Observe:



Ejemplo 6

Calcular el valor de cada función trigonométrica en

a) $\theta = 30^\circ$

b) $\theta = \frac{5\pi}{6}$

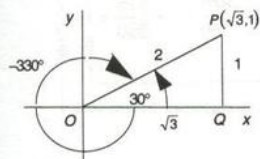
c) $\theta = -300^\circ$

d) $\theta = -\frac{3\pi}{4}$

e) $\theta = 675^\circ$

f) $\theta = -1030^\circ$

Solución



a) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

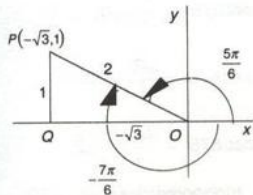
$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\csc 30^\circ = \frac{2}{1} = 2$

Nótese que las funciones trigonométricas en el ángulo de -330° valen lo mismo que en el de 30° .



b) $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cot \frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$

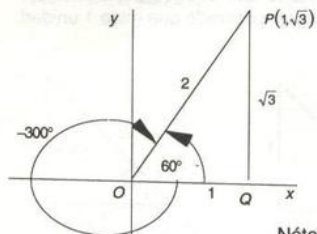
$\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sec \frac{5\pi}{6} = \frac{2}{-\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\tan \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

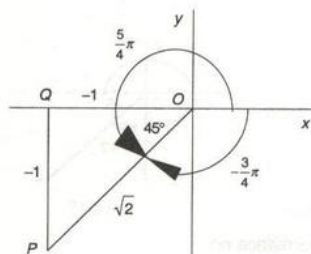
$\csc \frac{5\pi}{6} = \frac{2}{1} = 2$

Las funciones trigonométricas en $-\frac{7\pi}{6}$ valen lo mismo que en $\frac{5\pi}{6}$



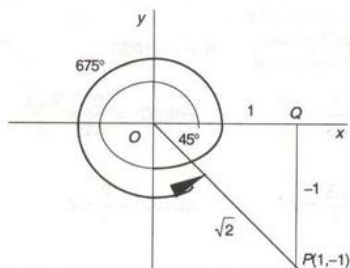
$$\begin{aligned} \text{c) } \sin(-300^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \cot(-300^\circ) &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos(-300^\circ) &= \frac{1}{2} & \sec(-300^\circ) &= \frac{2}{1} = 2 \\ \tan(-300^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} & \csc(-300^\circ) &= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Nótese que las funciones trigonométricas en 60° valen lo mismo que en -300° .



$$\begin{aligned} \text{d) } \sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) &= \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \cot\left(-\frac{3}{4}\pi\right) &= \frac{-1}{-1} = 1 \\ \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) &= \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sec\left(-\frac{3}{4}\pi\right) &= \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2} \\ \tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right) &= \frac{-1}{-1} = 1 & \csc\left(-\frac{3}{4}\pi\right) &= \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Nótese que las funciones en $-\frac{3}{4}\pi$ valen lo mismo que en $\frac{5}{4}\pi$



e) Al dividir 675 entre 360 se obtiene un residuo igual a 315. O sea

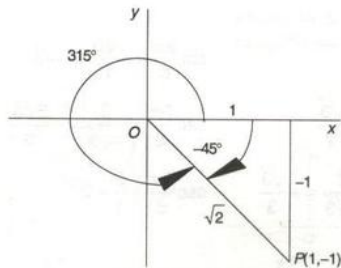
$$\begin{array}{r} 1 \\ 360 \overline{) 675} \\ \underline{315} \end{array} \qquad \frac{675}{360} = 1 + \frac{315}{360} = 1 + \frac{7}{8}$$

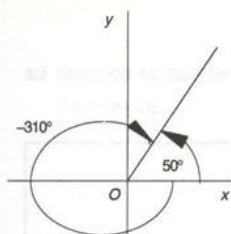
1 vuelta completa ↑
fracción de 1 vuelta ↑

En tal caso, las funciones trigonométricas en 675° valen lo mismo que en 315° . Entonces

$$\begin{aligned} \sin 675^\circ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \cot 675^\circ &= \frac{1}{-1} = -1 \\ \cos 675^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sec 675^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \\ \tan 675^\circ &= \frac{-1}{1} = -1 & \csc 675^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Nótese que las funciones trigonométricas en 675° valen lo mismo que en -45° .





f) Se divide 1030 entre 360.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 360 \overline{) 1030} \\ \underline{310} \end{array}$$

Se traza en posición normal el ángulo de -310° . Las funciones trigonométricas en -1030° valen lo mismo que en -310° y que en 50° . Con el uso de una calculadora o tablas trigonométricas se obtiene que

$$\operatorname{sen}(-1030^\circ) = \operatorname{sen}50^\circ \approx 0.7660$$

$$\cot(-1030^\circ) = \cot50^\circ \approx 0.8390$$

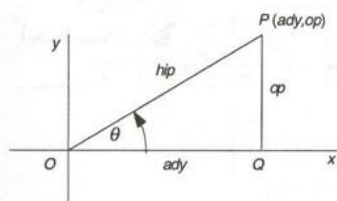
$$\cos(-1030^\circ) = \cos50^\circ \approx 0.6427$$

$$\sec(-1030^\circ) = \sec50^\circ \approx 1.5557$$

$$\tan(-1030^\circ) = \tan50^\circ \approx 1.1917$$

$$\csc(-1030^\circ) = \csc50^\circ \approx 1.3054$$

Nota



Para el caso de ángulos agudos, los valores de las funciones trigonométricas se interpretan como razones entre los lados del triángulo rectángulo que determina las coordenadas de un punto en el lado final del ángulo como se muestra en la figura adjunta.

En la figura, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Además *ady*, *op* e *hip* son formas abreviadas de referirse respectivamente a las longitudes del cateto adyacente, del cateto opuesto y de la hipotenusa del triángulo *OPQ* rectángulo, por lo que:

Si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{op}{hip}$$

$$\tan \theta = \frac{op}{ady}$$

$$\sec \theta = \frac{hip}{ady}$$

$$\cos \theta = \frac{ady}{hip}$$

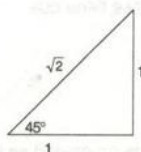
$$\cot \theta = \frac{ady}{op}$$

$$\csc \theta = \frac{hip}{op}$$

Ejemplo 7

Calcular los valores de las funciones *sen*, *cos* y *tan* en $\theta = 45^\circ$.

Solución



$$\operatorname{sen}45^\circ = \frac{op}{hip} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos45^\circ = \frac{ady}{hip} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan45^\circ = \frac{op}{ady} = \frac{1}{1} = 1$$

Fórmulas trigonométricas

A partir de la definición de las funciones trigonométricas se deducen las fórmulas trigonométricas usuales.

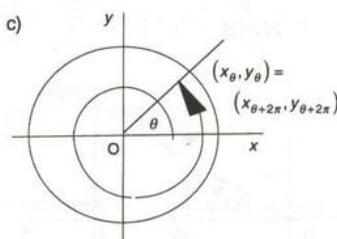
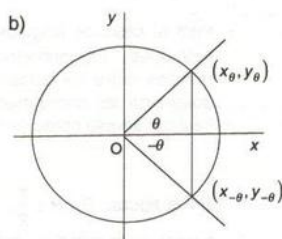
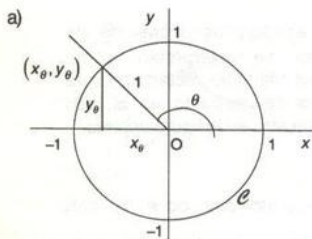
Teorema 4

Para cada θ :

a) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

b) $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ y $\cos(-\theta) = \cos \theta$

c) $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$ y $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$



Demostración

a) Por el teorema de Pitágoras

$$x_\theta^2 + y_\theta^2 = 1$$

Por definición $\cos \theta = x_\theta$ y $\sin \theta = y_\theta$. Entonces

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

b) Nótese que $x_{-\theta} = x_\theta$ y $y_{-\theta} = -y_\theta$. Entonces

$$\cos(-\theta) = x_{-\theta} = x_\theta = \cos \theta \quad \text{y} \quad \sin(-\theta) = y_{-\theta} = -y_\theta = -\sin \theta$$

c) Dado que $(x_\theta, y_\theta) = (x_{\theta+2\pi}, y_{\theta+2\pi})$, entonces

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta \quad \text{y} \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$$

□

Definición

Una función f es *periódica* si existe un número real positivo k tal que para cada x en el dominio ($\mathcal{D}_f$) de f se tiene que

- $x + k$ está en el $\mathcal{D}_f$, y
- $f(x + k) = f(x)$

Al mínimo k (si existe) con esta propiedad se le llama *periodo* de f

Del inciso c) del teorema 4 y el hecho de que $D_{\text{sen}} = D_{\text{cos}} = \mathbf{R}$ se sigue que las funciones seno y coseno son funciones periódicas cuyo periodo es 2π .

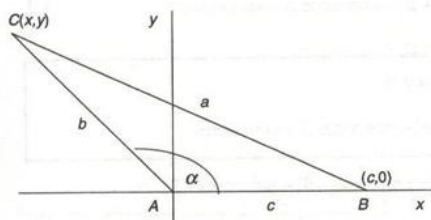
Teorema 5

Ley de cosenos. En cada triángulo las longitudes a , b y c de sus lados se relacionan así

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

en donde α es el ángulo opuesto al lado de longitud a

Demostración



Considérese el ángulo α en posición normal. En tal caso, las coordenadas de B son $(c,0)$ y por el teorema 3 de esta sección las coordenadas de C son $(x,y) = (b \cos \alpha, b \sin \alpha)$. De donde por la fórmula de la distancia entre dos puntos se tiene

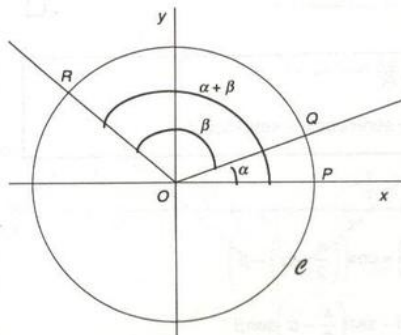
$$\begin{aligned} a^2 &= (x-c)^2 + (y-0)^2 = (b \cos \alpha - c)^2 + (b \sin \alpha)^2 \\ &= b^2 \cos^2 \alpha - 2bc \cos \alpha + c^2 + b^2 \sin^2 \alpha \\ &= b^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2bc \cos \alpha + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (\text{teorema 4(a)}) \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 6

Para cualesquiera ángulos α y β ,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Demostración



Supóngase que el ángulo POQ es la posición normal del ángulo α y que el ángulo POR es la posición normal del ángulo $\alpha + \beta$ con P , Q y R sobre la circunferencia unitaria $\mathcal{C}$. En tal caso, $P = (1,0)$ y por la definición 1,

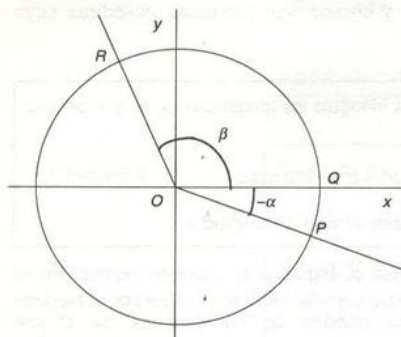
$$R = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$$

Entonces por la fórmula de la distancia entre dos puntos se tiene

$$\begin{aligned} PR^2 &= (\cos(\alpha + \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha + \beta))^2 \\ &= 2 - 2\cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Aplicáse ahora una rotación de amplitud $-\alpha$ a los puntos P , Q y R respecto al origen. Al efectuar la rotación el ángulo QOR es la posición normal del ángulo β . En cuyo caso

$$P = (\cos(-\alpha), \sin(-\alpha)), \quad R = (\cos \beta, \sin \beta) \text{ y}$$



$$\begin{aligned}
 PR^2 &= (\cos \beta - \cos(-\alpha))^2 + (\sin \beta - \sin(-\alpha))^2 \\
 &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta + \sin \alpha)^2 \\
 &= \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \alpha \\
 &\quad + \sin^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha \\
 &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)
 \end{aligned}$$

Como la distancia entre dos puntos es invariante bajo rotaciones, entonces

$$2 - 2 \cos(\alpha + \beta) = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$$

De donde

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \square$$

Corolario 1

Para cualesquiera ángulos α y β ,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Demostración

$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) \\
 &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta
 \end{aligned} \quad \square$$

Corolario 2

Para cada ángulo α ,

$$\text{a) } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \quad \text{b) } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

Demostración

a) Sigue inmediatamente del corolario 1.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) \quad (\text{parte (a) de este corolario}) \\
 &= \cos \alpha
 \end{aligned} \quad \square$$

Teorema 7

Para cualesquiera ángulos α y β ,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

Demostración

Por el corolario 2 se tiene

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) \\
 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta
 \end{aligned}$$

$$= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$$



Gráficas de las funciones trigonométricas

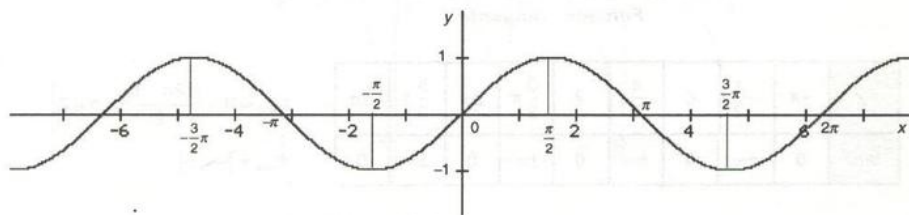
Función seno

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\operatorname{sen} x$	0	1	0	-1	0

$$\mathcal{D}_{\operatorname{sen}} =]-\infty, \infty[$$

$$\mathcal{R}_{\operatorname{sen}} = [-1, 1]$$

La gráfica de la función seno es como sigue



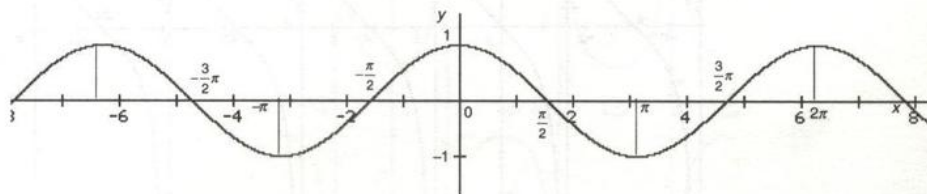
Función coseno

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\operatorname{cos} x$	1	0	-1	0	1

$$\mathcal{D}_{\operatorname{cos}} =]-\infty, \infty[$$

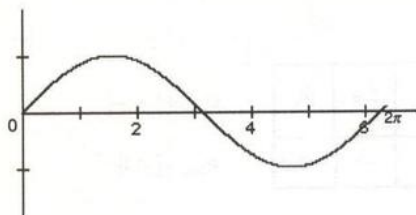
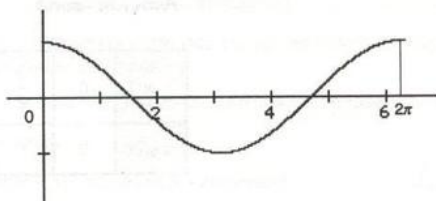
$$\mathcal{R}_{\operatorname{cos}} = [-1, 1]$$

La gráfica de la función coseno es como sigue



Nota

El inciso (c) del teorema 4, establece que las funciones seno y coseno son funciones *periódicas* cuyo periodo es 2π . Gráficamente, ello significa que a lo largo de intervalos consecutivos de longitud 2π la gráfica de cada una de estas funciones constituye un *ciclo* que se repite en cada uno de dichos intervalos.

Ciclo del seno en el intervalo $[0, 2\pi]$ Ciclo del coseno en el intervalo $[0, 2\pi]$ **Función tangente**

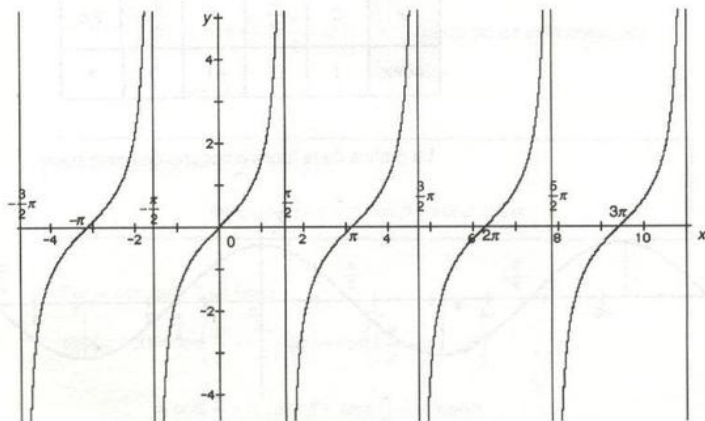
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$\tan x$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbf{R} - \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2} : n \in \mathbf{Z} \right\}$$

$$\mathcal{R}_{\tan} =]-\infty, \infty[$$

Nota: El símbolo $\pm\infty$ denota una indefinición, en este caso de la función tangente.

La gráfica de la función tangente es como sigue



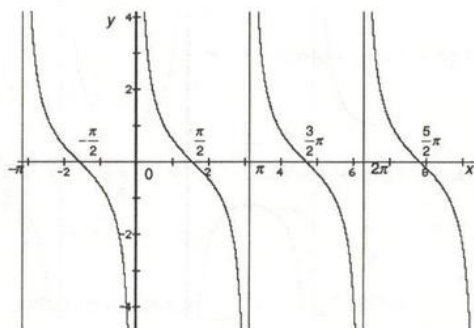
Función cotangente

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\cot x$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

$$\mathcal{D}_{\cot} = \mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathcal{R}_{\tan} =]-\infty, \infty[$$

La gráfica de la función cotangente es como sigue

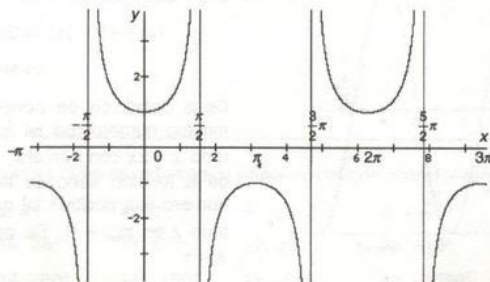
**Función secante**

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\sec x$	-1	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$	-1

$$\mathcal{D}_{\sec} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\mathcal{R}_{\sec} =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$$

La gráfica de la función secante es como sigue



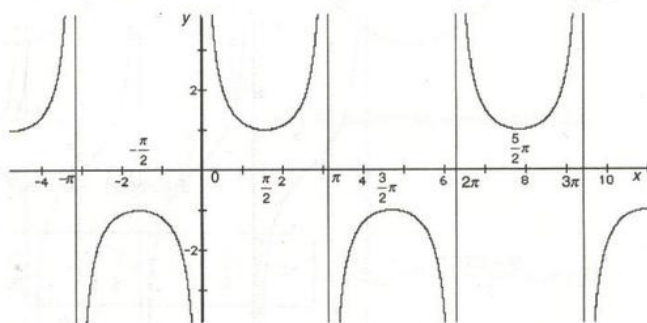
Función cosecante

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$\text{CSC } x$	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$

$$\mathcal{D}_{\text{CSC}} = \mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathcal{R}_{\text{CSC}} =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$$

La gráfica de la función cosecante es así



Gráficas de funciones trigonométricas de la forma
 $y = a \sin bx$, $y = a \cos bx$, $y = g(x) \sin bx$

Ejemplo 8

Solución

Graficar la función $f(x) = 3 \sin 2x$

Nótese que

$$|f(x)| = |3 \sin 2x| = |3| |\sin 2x| = 3 |\sin 2x| \leq (3)(1) = 3$$

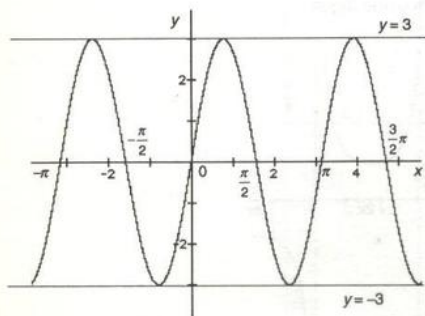
$$\text{O sea, } -3 \leq f(x) \leq 3$$

- El periodo k de $f(x) = 3 \sin 2x$ se obtiene como sigue

$$f(x+k) = f(x) \Leftrightarrow 3 \sin 2(x+k) = 3 \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x+2k) = \sin 2x$$

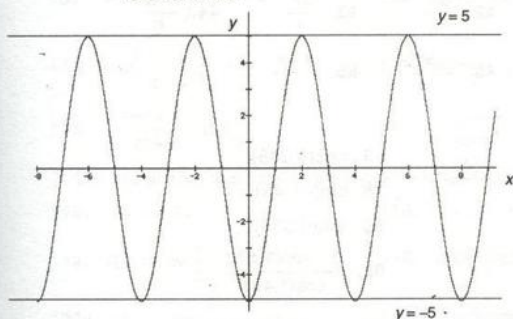
De la definición de periodo, se sigue que k es el mínimo número real tal que $\sin(z+2k) = \sin z$ para todo $z = 2x$ con x en el $\mathcal{D}$. Pero por ser 2π el periodo de la función seno se tiene que 2π es el mínimo número real positivo tal que $\sin(z+2\pi) = \sin z$ para todo z en $\mathcal{D}_{\sin} = \mathbb{R}$. De donde, $2k = 2\pi$. Por lo que $k = \pi$.



En la práctica el periodo k se obtiene dividiendo 2π entre el coeficiente de x . En este caso, $k = \frac{2\pi}{2} = \pi$. La gráfica de $f(x) = 3\sin 2x$ aparece adjunta al párrafo anterior.

Ejemplo 9

Graficar la función $f(x) = -5 \cos \frac{\pi}{2} x$

Solución

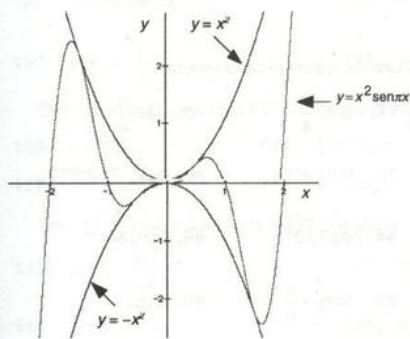
$$\bullet \quad |f(x)| = \left| -5 \cos \frac{\pi}{2} x \right| = 5 \left| \cos \frac{\pi}{2} x \right| \leq 5$$

$$\bullet \quad \text{El periodo } k \text{ de la función } f \text{ es } k = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

• La gráfica de $f(x) = -5 \cos \frac{\pi}{2} x$ está en la figura adjunta.

Ejemplo 10

Graficar $f(x) = x^2 \sin \pi x$.

Solución

$$\bullet \quad |f(x)| = |x^2 \sin \pi x| = x^2 |\sin \pi x| \leq x^2 (1) = x^2$$

$$\bullet \quad \text{El periodo } k \text{ de } f \text{ es } k = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

• La gráfica de $f(x) = x^2 \sin \pi x$ está en la figura adjunta.

Ejercicios 3.5

En los ejercicios del 1 al 30, convierta a radianes cada medida y trace en posición normal el correspondiente ángulo.

- | | | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|
| 1. 30° | 2. 60° | 3. 45° | 4. 90° | 5. 120° | 6. 135° | 7. 150° |
| 8. 180° | 9. 210° | 10. 240° | 11. 270° | 12. 300° | 13. 315° | 14. 330° |
| 15. 360° | 16. -30° | 17. -60° | 18. -450° | 19. -945° | 20. -1350° | 21. 1140° |



22. 840° 23. 1575° 24. 1080° 25. -540° 26. -1800° 27. -2520° 28. 630°
 29. 720° 30. 500°

En los ejercicios del 31 al 50, convierta a grados cada medida y trace en posición normal el correspondiente ángulo.

31. $\frac{\pi}{2}$ 32. $\frac{5}{6}\pi$ 33. $\frac{2\pi}{3}$ 34. $\frac{5\pi}{4}$ 35. $\frac{\pi}{4}$ 36. π 37. $\frac{\pi}{3}$
 38. $\frac{7\pi}{6}$ 39. $\frac{\pi}{6}$ 40. $\frac{4\pi}{3}$ 41. 2π 42. $\frac{3\pi}{4}$ 43. $\frac{5\pi}{3}$ 44. $\frac{11\pi}{6}$
 45. $\frac{7\pi}{4}$ 46. $-\frac{5\pi}{6}$ 47. $-\frac{7\pi}{3}$ 48. $-\frac{4\pi}{3}$ 49. $-\frac{5\pi}{4}$ 50. $-\frac{7\pi}{6}$

En los ejercicios del 51 al 70, calcule lo que se indica.

51. $\sin(0.325)$ 52. $\cos(-0.345)$ 53. $\cos(0.345)$
 54. $\sin(-0.325)$ 55. $\tan(0.524)$ 56. $\tan(-1.43)$
 57. $\sin(1.25)$ 58. $\sin(-2.54)$ 59. $\tan(0.634)$
 60. $\cos(1.008)$ 61. $\frac{32.4\sin(0.32)}{\cos(0.34)}$ 62. $\frac{1-\sin(1.401)}{\cos(1.401)}$
 63. $\sin^2(2.5) + \cos^2(2.5)$ 64. $\sqrt{\sin(1.5)} - \sqrt{\cos(1.5)}$ 65. $1 - \sin^2(0.824)$
 66. $\cos^2(0.824)$ 67. $\frac{5.3\tan(-1.4)^\circ}{\sin(5.1)^\circ}$ 68. $\left(\frac{\sin 315^\circ}{\sin 30^\circ + \cos 60^\circ}\right)^3$
 69. $\left(\frac{1+\cos 30^\circ}{1-\sin 30^\circ}\right)^{\frac{1}{2}}$ 70. $\frac{1-\tan^2(-45)^\circ}{1+\tan^2(-45)^\circ}$

En los ejercicios del 71 al 90, calcule el valor que se indica sin el uso de tablas ni calculadora.

71. $\sin 30^\circ$ 72. $\cos \frac{5\pi}{6}$ 73. $\tan \frac{\pi}{2}$ 74. $\sin \frac{5\pi}{4}$ 75. $\tan \frac{\pi}{4}$
 76. $\sin \frac{2\pi}{3}$ 77. $\cos \frac{7\pi}{6}$ 78. $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ 79. $\tan 630^\circ$ 80. $\cos(-2520^\circ)$
 81. $\tan(-330^\circ)$ 82. $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$ 83. $\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$ 84. $\cos 720^\circ$ 85. $\tan 1800^\circ$
 86. $\cos(-300^\circ)$ 87. $\sin \frac{5\pi}{3}$ 88. $\tan \frac{7\pi}{4}$ 89. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ 90. $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

Del 91 al 114, demuestre cada identidad.

91. $\sin 2t = 2\sin t \cos t$ 92. $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ 93. $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$
 94. $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$ 95. $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1+\cos t}{2}$ 96. $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1-\cos t}{2}$
 97. $(1+\sin x)(1-\sin x) = \frac{1}{\sec^2 x}$ 98. $\frac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t} = \sin^2 t$ 99. $\cos x(\tan x + \cot x) = \csc x$

100. $\frac{\sec x}{\cos x} - \frac{\tan x}{\cot x} = 1$

103. $\frac{\sec t}{\csc t} + \frac{\cos t}{\sec t} = 1$

105. $\frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \cot x$

107. $\sin(\pi + x) = -\sin x$

110. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

113. $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}$

101. $\frac{\csc x}{\sin x} - \frac{\cot x}{\tan x} = 1$

104. $(1 + \tan u)^2 = \sec^2 u + 2 \tan u$

106. $(1 + \cos x)(1 - \cos x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

108. $\cos(\pi + x) = -\cos x$

111. $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

114. $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$

102. $\cot x(\sec x - \tan x) = \csc x - 1$

109. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

112. $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

Del 115 al 132, bosqueje la gráfica de la función dada.

115. $y = \sin 2x$

118. $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

121. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

124. $y = \sin \frac{x}{2}$

127. $y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

130. $y = \csc \frac{x}{2}$

116. $y = \sin(x + 3)$

119. $f(x) = 2 \cos x$

122. $y = 3 \cos 2x$

125. $y = 2 \sec 2x$

128. $y = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

131. $y = x^2 \cos x$

117. $y = 3 \sin x$

120. $f(x) = \cos(x - 2) + 1$

123. $f(x) = 2 \sin \frac{2x}{3}$

126. $y = 1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

129. $y = \tan 2x$

132. $y = \sin x - x$

Del 133 al 140, diga si la función es par o impar o nada de eso.

133. $y = \sin x$

137. $y = x \cos x$

134. $y = \cos x$

138. $y = \csc x$

135. $y = x \sin x$

139. $y = \sin x - \cos x$

136. $y = \sin^2 x$

140. $y = \sec x$

Del 141 al 160, establezca la fórmula dada.

141. $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

144. $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$

147. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

150. $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

153. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$

156. $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

142. $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

145. $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$

148. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

151. $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

154. $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$

157. $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$

143. $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

146. $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

149. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

152. $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

155. $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

158. $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha$

159. $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

160. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

3.6 Funciones trigonométricas inversas

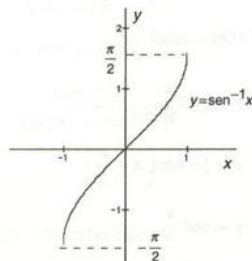
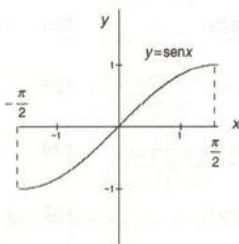
Al restringir el dominio de las funciones trigonométricas sobre ciertos intervalos se obtienen funciones biyectivas las cuales tienen una inversa.

Ejemplo 1

La función $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ definida como $f(x) = \sin x$ es uno a uno y sobre; por lo que, existe $f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ función inversa de f , la cual se define como

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

o lo que es lo mismo $\sin^{-1}x = y \Leftrightarrow \sin y = x$



Definición

La función *seno inverso*, se denota como $\sin^{-1}$ o *arcsen* y se define así

$$\sin^{-1}x = y \Leftrightarrow \sin y = x$$

para cada $-1 \leq x \leq 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Notas

1. En la notación de funciones inversas, el -1 no actúa como exponente; o sea, $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$. Por lo que, $\sin^{-1}x \neq \frac{1}{\sin x}$

2. El dominio y el rango de $\sin^{-1}$ son

$$\mathcal{D}_{\sin^{-1}} = [-1, 1], \quad \mathcal{R}_{\sin^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

3. La composición de funciones inversas es la función idéntica, entonces

- $\text{sen}^{-1}(\text{sen } x) = (\text{sen}^{-1} \circ \text{sen})(x) = \text{id}(x) = x$, para $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
- $\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = (\text{sen} \circ \text{sen}^{-1})(x) = \text{id}(x) = x$, para $-1 \leq x \leq 1$

Ejemplo 2

Evaluar

$$\text{a) } \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{b) } \text{sen}\left(\text{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{c) } \text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$$

Solución

a) Como $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, entonces

$$y = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \text{sen } y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ con } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Pero también $\text{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ con $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, entonces $\text{sen } y = \text{sen} \frac{\pi}{3}$

Por ser la función sen uno a uno en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, se sigue que $y = \frac{\pi}{3}$. De

$$\text{donde, } \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

b) Como $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, entonces por la nota 3 $\text{sen}\left(\text{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Como $\frac{3\pi}{4}$ no está en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces

$$\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Las otras funciones trigonométricas inversas son

$$\cos^{-1} = \arccos$$

$$\cot^{-1} = \text{arc cot}$$

$$\csc^{-1} = \text{arc csc}$$

$$\tan^{-1} = \arctan$$

$$\sec^{-1} = \text{arc sec}$$

y se definen análogamente como sigue:

Definición

$$1. \cos^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \cos y = x \text{ para cada } -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi$$

$$2. \tan^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \tan y = x \text{ para cada } x \text{ en } \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$3. \cot^{-1} x = y \Leftrightarrow \cot y = x \text{ para cada } x \text{ en } \mathbb{R}, 0 < y < \pi$$

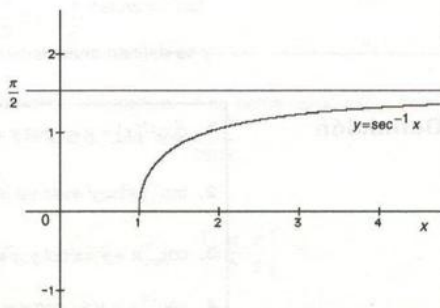
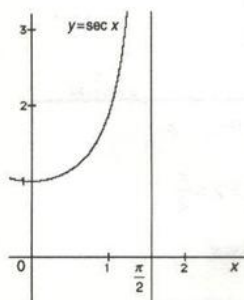
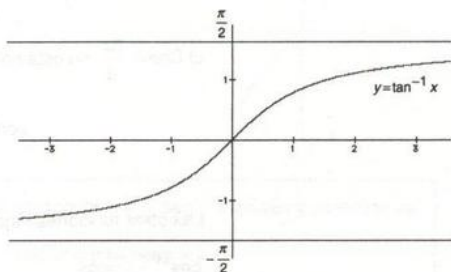
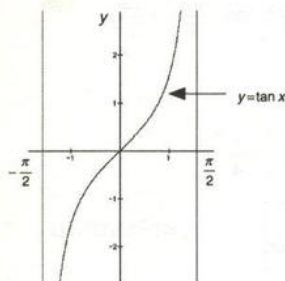
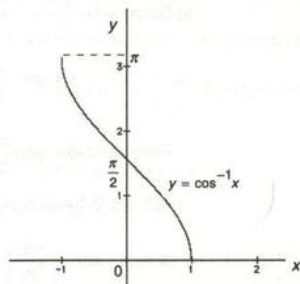
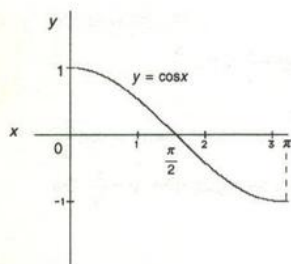
$$4. \sec^{-1} x = y \Leftrightarrow \sec y = x \text{ para cualesquiera } x \text{ y } y \text{ tales que}$$

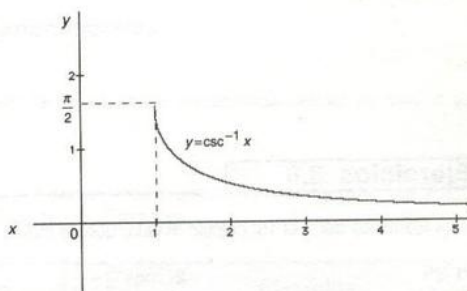
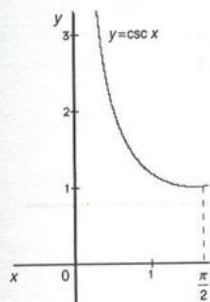
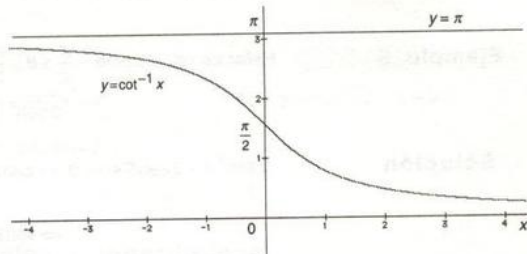
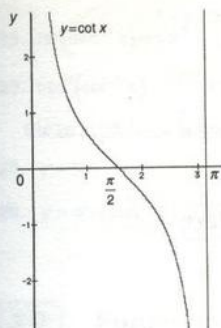
$$x \geq 1 \text{ y } 0 \leq y < \frac{\pi}{2} \text{ o } x \leq -1 \text{ y } \frac{\pi}{2} < y \leq \pi$$

5. $\csc^{-1} x = y \Leftrightarrow \csc y = x$ para cualesquiera x y y tales que

$$x \geq 1 \text{ y } -\frac{\pi}{2} < y \leq 0 \text{ o } x \leq -1 \text{ y } 0 \leq y < \frac{\pi}{2}$$

Las gráficas de estas funciones se muestran enseguida.



**Ejemplo 3**Evaluar $\sin\left(\cos^{-1}\frac{5}{13}\right)$

$$\frac{60}{h} \text{ es } \frac{h}{60} = \frac{13}{5}$$

Solución

Supóngase que $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$. Como $-1 < \frac{5}{13} < 1$, entonces $\cos \theta = \frac{5}{13}$ con $0 < \theta < \pi$. Por el teorema 3 de la sección 3.5 se tiene

$$\cos \theta = \frac{5}{13} = \frac{x}{r} \text{ con } x = 5 \text{ y } r = 13$$

Como $x^2 + y^2 = r^2$, entonces

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} = \pm\sqrt{13^2 - 5^2} = \pm\sqrt{144} = \pm 12$$

De donde $\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\pm 12}{13} = \pm \frac{12}{13}$. Pero $0 < \theta < \pi$, entonces $\sin \theta = \frac{12}{13}$

Por lo que $\sin\left(\cos^{-1}\frac{5}{13}\right) = \sin \theta = \frac{12}{13}$

Ejemplo 4

Calcular la regla de correspondencia de la inversa de $f(x) = \operatorname{arcsec} \sqrt{x-1}$ para $x \geq 1$

Solución

$$y = \operatorname{arcsec} \sqrt{x-1} \Rightarrow \sec y = \sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow \sec^2 y = |x - 1| = x - 1 \Rightarrow x = \sec^2 y + 1$$

$$\text{Entonces, } f^{-1}(x) = \sec^2 x + 1$$

Ejemplo 5

Hallar los valores para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ tales que

$$2\sec^2 \theta - 3\sec \theta + 1 = 0$$

Solución

$$2\sec^2 \theta - 3\sec \theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \sec \theta = \frac{-(-3) \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$\Leftrightarrow \sec \theta = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sec \theta = 1 \text{ o } \sec \theta = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \sec^{-1}(1) \text{ o } \theta = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ o } \theta = \frac{\pi}{6}$$

Ejercicios 3.6

En los ejercicios del 1 al 15, calcule el valor que se indica.

1. $\sec^{-1}(1)$

2. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

3. $\operatorname{arcsec}(-\sqrt{2})$

4. $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

5. $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6. $\cot^{-1}(-1)$

7. $\tan^{-1}(0)$

8. $\cot\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

9. $\sec\left(\csc^{-1}\left(\frac{25}{24}\right)\right)$

10. $\cos\left(\sec^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)\right)$

11. $\tan(\tan^{-1}(0.001))$

12. $\sec^{-1}(-2)$

13. $\tan\left(\sec^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

14. $\sec(\tan^{-1}(0) - \sec^{-1}(2))$

15. $\cos^{-1}(\sec(\tan^{-1}(1)))$

Del 16 al 20, determine los valores para $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ que satisfacen la ecuación dada.

16. $2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$

17. $\frac{\tan^2 \theta - \tan \theta}{\sqrt{13}} = \tan \theta - 1$

18. $2\sec \theta + 1 = \csc \theta$

19. $\cos^{-1} \theta + \sec^{-1} \theta = \frac{\pi}{2}$

20. $\tan \theta - 1 = \sqrt{3} \cot \theta - \sqrt{3}$

Del 21 al 25, demuestre la proposición dada.

21. $\cos^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ para todo x

22. $\cos(\sec^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$ para $-1 \leq x \leq 1$

23. $\tan(\sec^{-1} x) = \sqrt{x^2 - 1}$ para $|x| \geq 1$

24. $\sec^2(\tan^{-1} x) = x^2 + 1$ para todo x

25. $\csc^2(\cot^{-1} x) = x^2 + 1$ para todo x

Del 26 al 30, trace la gráfica de cada función.

26. $y = \tan^{-1} x + 1$

27. $y = \sin^{-1} x + x$

28. $y = \cot^{-1}(x - 1) + 2$

29. $y = \sin(\sin^{-1} x)$

30. $y = \cos(\arccos x)$

3.7

Funciones exponenciales y logarítmicas

Funciones exponenciales

Enseguida se tienen las *leyes de los exponentes* usadas en cursos de álgebra.

Supóngase que a y b son números reales positivos y que x y y son cualesquiera números reales. Entonces:

Leyes	Ejemplos
1. $a^x a^y = a^{x+y}$	$2^{\sqrt{5}} 2^{\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$	$(3^{\sqrt{6}})^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = 3^{\sqrt{12}} = 3^4 = 81$
3. $(ab)^x = a^x b^x$	$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
5. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\frac{2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$
6. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a} = a^{\frac{1}{3}-1} = a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$
7. $a^0 = 1$	$5^0 = 1$

Existen funciones definidas mediante un potencia las cuales se usan frecuentemente. A estas funciones se les llama *funciones exponenciales*. Precizando se dice que:

Definición 1

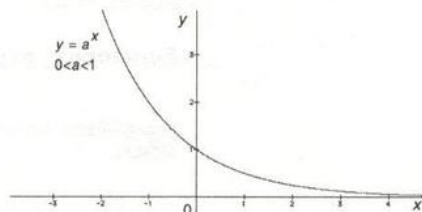
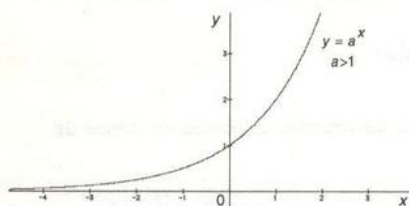
La función exponencial de base a se define como

$$f(x) = a^x$$

en donde a es un número real positivo distinto de 1

Tomando en cuenta que el exponente x es cualquier número real y el hecho de que $a^x > 0$ para todo número real x ; el dominio $\mathcal{D}_{a^x}$ y el rango $\mathcal{R}_{a^x}$ de la función exponencial $f(x) = a^x$ son

$$\mathcal{D}_{a^x} =]-\infty, \infty[= \mathbf{R} \text{ y } \mathcal{R}_{a^x} =]0, \infty[$$

**Ejemplo 1**

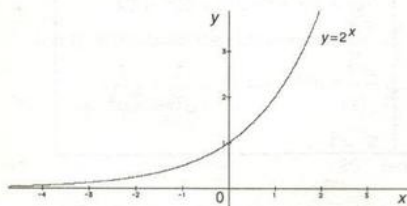
Las funciones exponenciales f y g de bases respectivas 2 y $\frac{1}{2}$ se definen así

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$$

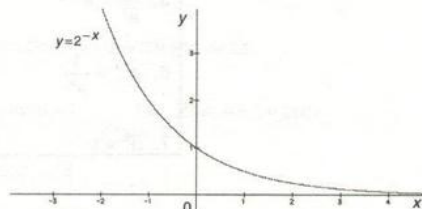
y sus gráficas son

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^{-x}$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



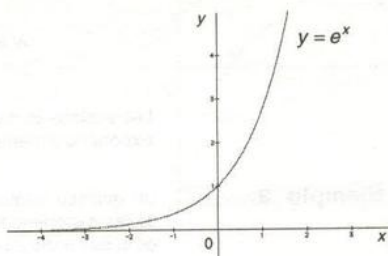
Crecimiento exponencial



Decrecimiento exponencial

De particular importancia por sus múltiples aplicaciones, es la función exponencial de base $e \approx 2.7182818284$ la cual se denota frecuentemente como $\exp(x) = e^x$ y su gráfica es

x	$y = e^x$
-2	0.13
-1	0.37
0	1
1	2.7
2	7.38



Nota

Una forma de aproximar el número e es mediante la expresión

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

en donde n es un número entero positivo que crece indefinidamente como se muestra en la siguiente tabla.

n	10	100	1000	10 000	100 000
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2.5937	2.7048	2.7169	2.7181	2.7182

En realidad, el número e es el límite de la expresión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ cuando el número n tiende a más infinito ($n \rightarrow +\infty$). O sea

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Estos límites serán estudiados con todo detalle en el capítulo siguiente. A este número se le denota con la letra " e " en honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) quien lo introdujo por vez primera en 1728.

Ejemplo 2

En un cultivo el número N de bacterias después de t minutos, está dado por $N = ke^{\frac{t}{20}}$ en donde k es una constante. Si al inicio hay 500 bacterias, ¿cuántas habrá $\frac{1}{2}$ hora después?

Solución

Al inicio hay 500 bacterias en $t = 0$ minutos, entonces:

$$500 = ke^{\frac{0}{20}} = ke^0 = k(1) = k$$

Así que, $N = 500e^{\frac{1}{20}}$. Como $\frac{1}{2}$ hora equivale a 30 minutos, entonces el número N de bacterias que habrá después de $\frac{1}{2}$ hora se calcula así

$$N = 500e^{\frac{30}{20}} = 500e^{1.5} \approx (500)(4.48) = 2240$$

Las sustancias radiactivas como el uranio y el carbono-14 se volatilizan exponencialmente.

Ejemplo 3

Solución

Un químico adquiere 100 gramos de una sustancia radiactiva la cual decae exponencialmente a razón de 10% por hora. ¿Qué tanto queda de la sustancia 2 horas después?

Supóngase que t segundos después de adquirida la sustancia, hay N gramos de ella. Estas variables se relacionan así

$$N = ke^{-10\%t} = ke^{-0.1t}$$

en donde k es una constante. Al adquirir la sustancia hay 100 gramos en $t = 0$ segundos. Por lo que

$$100 = ke^{(-0.1)(0)} = ke^0 = k$$

Así que, $N = 100e^{-0.1t}$. De donde el número N de gramos que queda después de $t = 2$ horas es

$$N = 100e^{(-0.1)(2)} = 100e^{-0.2} \approx (100)(0.8187) = 81.87$$

Funciones logarítmicas

Una función exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ definida como $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$, es uno a uno y sobre; consecuentemente existe la función inversa $f^{-1}:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada como

$$f^{-1}(x) = y \text{ si y sólo si } x = a^y$$

A una función que es la inversa de una función exponencial se le llama *función logaritmo*. Precizando se dice que:

Definición 2

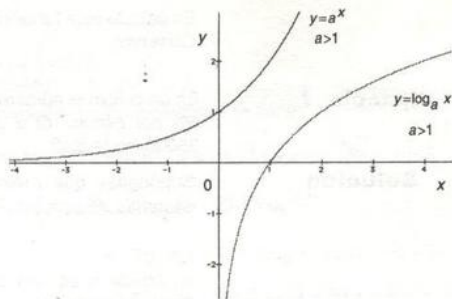
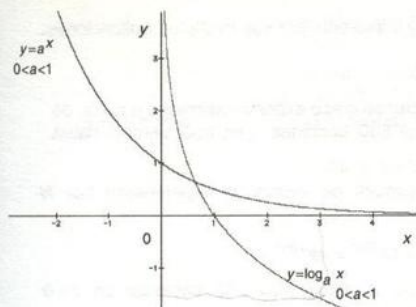
La *función logaritmo* de base $a > 0$ y $a \neq 1$ se denota como $\log_a$ y se define así

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$

El dominio y el rango de esta función son

$$\mathcal{D}_{\log_a} =]0, \infty[, \mathcal{R}_{\log_a} = \mathbb{R}$$

y su gráfica es como sigue

**Ejemplo 4**

- a) $\log_5 25 = 2$ porque $25 = 5^2$
 b) $\log_e 1 = 0$ porque $e^0 = 1$
 c) $\log_a a = 1$ porque $a = a^1$
 d) $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$ porque $\sqrt{3} = 3^{1/2}$

Ejemplo 5**Solución**

Calcular un valor aproximado para $\log_{10} 200$

$$\log_{10} 200 = y \Leftrightarrow 10^y = 200$$

Acotando el 200 entre potencias sucesivas de 10 se encuentra que

$$10^{2.3010} < 200 < 10^{2.3011}$$

Por lo que $10^y = 10^{2.3010}$. De donde $y = 2.3010$

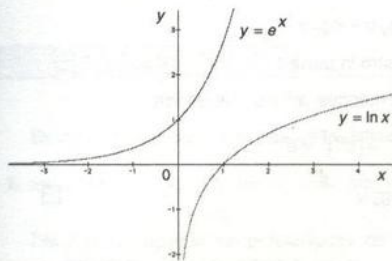
Ejemplo 6

Resolver la ecuación $\log_{\frac{1}{3}} x^2 = -2$.

Solución

$$\log_{\frac{1}{3}} x^2 = -2 \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ o } x = -3$$



Cuando la base del logaritmo es el número e , la función logaritmo $\log_e$ se llama *función logaritmo natural* y se denota como $\ln$. O sea, $\ln = \log_e$. El dominio y el rango de esta función son

$$\mathcal{D}_{\ln} =]0, \infty[, \mathcal{R}_{\ln} =]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$$

y su gráfica aparece en la figura adjunta.

En cálculo esta función es muy importante por sus múltiples aplicaciones. Observe:

Ejemplo 7

En un cultivo el número de bacterias crece exponencialmente a razón de 5% por minuto. Si al inicio hay 500 bacterias, ¿en qué tiempo habrá 35000 bacterias?

Solución

Supóngase que t minutos después de iniciado el experimento hay N bacterias. Entonces:

$$N = ke^{5\%t} = ke^{0.05t}$$

en donde k es una constante. Al inicio hay 500 bacterias en $t=0$ minutos, entonces

$$500 = ke^{(0.05)(0)} = ke^0 = k$$

Así que, $N = 500e^{0.05t}$. De donde para $N = 35000$ se tiene

$$35000 = 500e^{0.05t} \text{ o bien } 70 = e^{0.05t}$$

Para despejar el tiempo t que corresponde a las 35000 bacterias se aplica la función $\ln$ a ambos lados de la ecuación anterior, así

$$\ln(70) = \ln(e^{0.05t}) \Leftrightarrow \ln 70 = 0.05t \Leftrightarrow t = \frac{\ln 70}{0.05} \approx \frac{4.2485}{0.05} = 84.97$$

Por lo que, después de 84.97 minutos habrá 35000 bacterias.

Propiedades básicas de los logaritmos

Teorema 1

Propiedades básicas de los logaritmos

$$1. \log_a uv = \log_a u + \log_a v$$

$$2. \log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

$$3. \log_a u^v = v \log_a u$$

Demostración

1. Supóngase que $\log_a u = p$ y que $\log_a v = q$. Entonces $a^p = u$ y $a^q = v$. De donde

$$uv = a^p a^q = a^{p+q} \text{ o sea } a^{p+q} = uv$$

$$\text{Así que, } \log_a uv = p + q = \log_a u + \log_a v$$

2. Se demuestra como se demostró la parte 1

3. Supóngase que $\log_a u = p$. Entonces $a^p = u$. De donde

$$u^v = (a^p)^v = a^{vp}$$

$$\text{Por lo que, } \log_a u^v = vp = v \log_a u$$



Ejemplo 8

Resolver cada ecuación

$$a) 2\log_3 x = 3\log_3 5$$

$$b) \log_5 x + \log_5 (x+2) = \frac{1}{2}\log_5 9$$

Solución

a) Aplicando las propiedades de los logaritmos se tiene

$$2\log_3 x = 3\log_3 5 \Leftrightarrow \log_3 x^2 = \log_3 5^3 \Leftrightarrow x^2 = 5^3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5^3} = \pm 5\sqrt{5}$$

$$b) \log_5 x + \log_5 (x+2) = \frac{1}{2}\log_5 9 \Leftrightarrow \log_5 x(x+2) = \log_5 9^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \log_5 x(x+2) = \log_5 3 \Leftrightarrow x(x+2) = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \text{ o } x = 1$$

Dos logaritmos de base distinta se relacionan como sigue

Teorema 2

$$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$$

Demostración

Supóngase que $\log_b x = p$ y que $\log_a b = q$, Entonces $b^p = x$ y $a^q = b$

Sustituyendo b por a^q en $b^p = x$, se tiene $(a^q)^p = x$. O sea $a^{pq} = x$. De donde

$$\log_a x = pq = \log_b x \cdot \log_a b$$

□

Corolario 1

$$a) \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$b) \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

Demostración

a) Por el teorema 2

$$\ln x = \log_e x = \log_a x \cdot \log_e a = \log_a x \cdot \ln a$$

$$\text{De donde, } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

b) Sigue inmediatamente de la parte (a).

□

Ejercicios 3.7

En los ejercicios del 1 al 6, aplique la definición 2 para calcular el valor que se indica.

1. $\log_{10} 100$

2. $\log_2 16$

3. $\log_3 81$

4. $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{32} \right)$

5. $\log_{10} \sqrt{1000}$

6. $e^{\ln 4}$

Del 7 al 12, aplique las propiedades de los logaritmos para expresar cada logaritmo en términos de los logaritmos de los números x , y y z .

$$7. \log_a 3xy \quad 8. \log_a \frac{x}{y} \quad 9. \log_a \frac{x}{yz} \quad 10. \log_a \sqrt[3]{\frac{xy}{z}} \quad 11. \log_a \sqrt{xy} \cdot \sqrt[3]{z} \quad 12. \log_a \frac{z^2}{\sqrt{y}\sqrt{z}}$$

Del 13 al 15, escriba cada expresión como un sólo logaritmo con coeficiente 1.

$$13. \frac{1}{4} \log_a x + \frac{3}{4} \log_a y - \frac{1}{2} \log_a z \quad 14. \ln x - \ln y + \ln z \quad 15. \left(\frac{3}{5} \ln x - \frac{2}{5} \ln y \right) - \frac{4}{5} \ln z$$

Del 16 al 25, resuelva cada ecuación.

$$16. \log_{10} x + 2 \log_{10} 5 = 2 \quad 17. \log_3 x + \log_3 (x+2) = 1 \quad 18. e^{x+2} = 1$$

$$19. \ln \left| v + \sqrt{v^2 + 12} \right| = \ln 3 + \ln 2 \quad 20. \ln(e^{x^2-1}) = 3 \quad 21. 2^{3x} = 8$$

$$22. 3^{a^x} = 9 \quad 23. \ln x + \ln 2 = \ln(x+1) \quad 24. \log_2 \left(\frac{x-1}{x-2} \right) = 1 + \log_2 \left(\frac{x}{x-1} \right)$$

$$25. \ln(x-1) + \ln(x+2) = \ln 4$$

Del 26 al 30, simplifique cada expresión aplicando las propiedades.

$$26. \ln(3 + \sqrt{8}) + \ln(3 - \sqrt{8})^{10} \quad 27. \ln \left(\frac{\sqrt{10} + 1}{3} \right) + \ln \left(\frac{\sqrt{10} - 1}{3} \right) \quad 28. \ln \sqrt[3]{e^2}$$

$$29. e^{-\ln 5} \quad 30. e^{\ln 3 - \ln 5}$$

Del 31 al 34, encuentre la inversa de cada función.

$$31. y = \ln(x-3) \quad 32. y = \frac{2^x}{2^x + 1} \quad 33. y = \ln \left(\frac{1}{1-2x} \right) \quad 34. y = \sqrt{e^x}$$

35. Una colonia de bacterias crece exponencialmente a razón de 2.5% por minuto durante los primeros 60 minutos. Encuentre una fórmula para el número N de bacterias t minutos después con $0 \leq t \leq 60$ y determine cuántas bacterias tendrá la colonia 35 minutos después.

36. Después de t años el número N de miligramos de radio es $N = ke^{-0.0005t}$ en donde k es una constante. Si actualmente hay 80 miligramos de radio, ¿cuántos habrá dentro de medio siglo?

37. La magnitud M de un movimiento telúrico (sismo, temblor o terremoto) fue definida por el geólogo alemán C.F. Richter como $M = \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$ en donde I es la intensidad del movimiento medida por un sismógrafo e I_0 es una intensidad constante de referencia igual a 10^{-4} unidades (u) de amplitud. El terremoto de la ciudad de México ocurrido en 1985 tuvo una intensidad I aproximadamente igual a $1.26 \times 10^4 u$, ¿cuál fue su magnitud en la escala de Richter?

38. La magnitud M aparente de un astro de esplendor E se define como $M = \log_a \left(\frac{E}{E_0} \right)$ en donde E_0 es un esplendor constante de referencia. Si $\ln a = \frac{\ln 100}{5}$ y los esplendores E del Sol y de la Luna son respectivamente $4.786 \times 10^{10} E_0$ y $1.2 \times 10^5 E_0$, calcule el valor de a y las magnitudes aparentes de ambos astros.

4 LÍMITES Y CONTINUIDAD

4.0

Introducción

La noción de límite es la base fundamental del cálculo y surge como una necesidad de aproximar la pendiente de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos y como una necesidad de aproximar la velocidad instantánea de una partícula, dando lugar a la noción de la derivada. Estas necesidades fueron resueltas en el siglo XVII con una idea imprecisa y no satisfactoria de aproximación de cantidades. Por ejemplo:

- El matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665), aproximó la pendiente de la tangente, considerando la aproximación de cantidades como algo relativo a cantidades "casi iguales".
- El científico inglés Sir Isaac Newton (1642-1727) aproximó la velocidad instantánea con la idea de aproximación de cantidades como algo que se "desvanece o que son razones primeras y últimas".
- El matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716) también aproximó la tangente a una curva pero lo hizo con la idea de cantidades infinitesimales que se "desprecian".

Fue el matemático francés Jean le Rond D'Alembert (1717-1783) quien definió los infinitésimos de Leibniz en términos de límites. Con D'Alembert aparece por primera vez la palabra "límite" y una idea intuitiva de tal concepto. A saber:

"Una cantidad es el límite de una segunda cantidad variable, si ésta puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada".

Esta idea intuitiva de límite fue mejorada en el siglo XIX por el matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857) quedando casi tan precisa como la definición moderna dada por el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) la cual involucra hoy en día el uso de ε - δ .

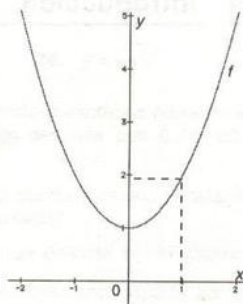
Si bien es cierto que la noción de límite surge como consecuencia de la noción de derivada, también es innegable que a la derivada se le estudia y caracteriza mejor teniendo clara la noción de límite y sus propiedades. Es por esto que en este texto se estudian los límites antes que las derivadas de funciones quedando claro que el desarrollo del cálculo se puede hacer de diversas formas muy respetables todas ellas.

4.1 Noción intuitiva de límite

Considérese la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$

x	$f(x)$
0	1
0.5	1.25
0.75	1.562
0.85	1.72
0.95	1.90
0.995	1.99

x	$f(x)$
2	5
1.5	3.25
1.1	2.21
1.01	2.02
1.005	2.01
1.001	2.002

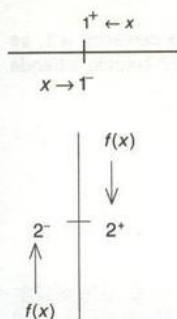


En las tablas y en la gráfica de la función f se observa que cuando x se aproxima o tiende a 1 por la izquierda o por la derecha de 1, los valores de $f(x)$ se aproximan o tienden a 2. Esto se expresa así

$$f(x) \rightarrow 2 \text{ o bien } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Esto, es un límite y se lee "límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1, es 2". La expresión "tiende a" se simboliza con una flecha " $\rightarrow$ ". Así

Notación	Se lee	Significa
$x \rightarrow 1$	x tiende a 1	x se aproxima a 1 con valores $x \neq 0$



$x \rightarrow 1^-$	x tiende a 1 por la izquierda	x se aproxima a 1 con valores $x < 1$
$x \rightarrow 1^+$	x tiende a 1 por la derecha	x se aproxima a 1 con valores $x > 1$
$f(x) \rightarrow 2$	$f(x)$ tiende a 2	$f(x)$ se aproxima a 2 con valores $f(x) \neq 2$
$f(x) \rightarrow 2^+$	$f(x)$ tiende a 2 por arriba	$f(x)$ se aproxima a 2 con valores $f(x) > 2$
$f(x) \rightarrow 2^-$	$f(x)$ tiende a 2 por abajo	$f(x)$ se aproxima a 2 con valores $f(x) < 2$
$f(x) \rightarrow 2$ $x \rightarrow 1$	$f(x)$ tiende a 2 cuando x tiende a 1	$f(x)$ se aproxima tanto como se quiera a 2, a condición de que x esté suficientemente cerca de 1

El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a un número a se define como sigue

Definición 1

El límite de $f(x)$ en $x = a$ o el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a , se denota como

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

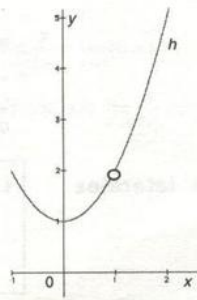
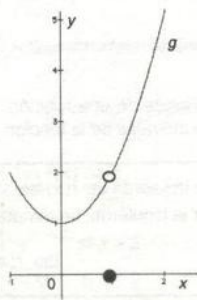
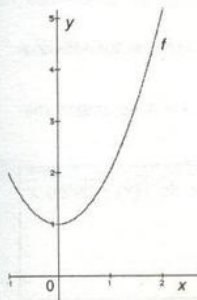
y es un número real L si cada vez que x se aproxima con valores distintos de a por la izquierda o por la derecha del número a , $f(x)$ se aproxima a L . Esto se escribe así

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ o bien } f(x) \rightarrow L \text{ cuando } x \rightarrow a$$

Ejemplo 1

Considérense las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= x^2 + 1 & \text{b) } g(x) &= \begin{cases} x^4 - 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} & \text{c) } h(x) &= \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} \end{aligned}$$



Entonces:

Observaciones 1

Al tabular y graficar estas funciones con valores de x cercanos a 1, se observa que los valores de cada una de ellas tienden a 2 cuando x tiende a 1. O sea

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \rightarrow 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1} h(x) \rightarrow 2$$

O bien, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$

2 También se observa que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(2)$. Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = f(2)$$

En general, el valor L del límite de un polinomio $p(x)$ en un punto $x = a$ se obtiene sustituyendo a x por a en el polinomio. O sea

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$$

No todos los límites se calculan mediante la sustitución directa de la variable x por el número a al cual tiende. Por ejemplo si se sustituye a x por el 1 en el límite de la función g del ejemplo 1 se obtiene un resultado (indeterminado) sin sentido. Observe:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{1^4 - 1}{1^2 - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

No obstante, estas indeterminaciones se pueden eliminar en forma algebraica, pudiéndose en seguida calcular el límite por sustitución directa de la x por el 1. Observe:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

3 El límite de una función en un punto $x = a$ puede existir sin que la función esté definida en $x = a$. Por ejemplo, la función h del ejemplo 1 en cuestión no está definida en $x = 1$; o sea, $h(1)$ no existe; sin embargo el límite de h en 1 si existe. Observe:

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$$

Nota: Que exista el límite de una función significa que el valor L del límite de la función es un número real.

La existencia del límite de una función en un punto $x = a$ se analiza mediante los *límites laterales* de la función en $x = a$

Límites laterales

1. El límite por la izquierda de $f(x)$ en $x = a$ o el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda, se denota como

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

y es un número real L si cada vez que x se aproxima por la izquierda al número a , $f(x)$ se aproxima a L

2. El límite por la derecha de $f(x)$ en $x = a$ o el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha se denota como

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

y es un número real L si cada vez que x se aproxima por la derecha al número a , $f(x)$ se aproxima a L

Ejemplo 2

Considérese la función

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x - 2}{x^2 - 4} & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Calcular

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

Solución

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 2 - 2 = 0$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{4}$$

De la definición 1 y la definición de límites laterales se sigue que el límite de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ existe si y sólo si los límites laterales existen y son iguales como se enuncia enseguida

Teorema 1

Si L es un número real, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ si y sólo si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Ejemplo 3

¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$?

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$, por el teorema 1 se sigue que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ no existe

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ para

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 2 \\ x + 2 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4$$

Entonces por el teorema 1 se tiene que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

Ejemplo 5

$$\text{Si } f(x) = \begin{cases} (x-k)^2 & \text{si } x < -1 \\ x-k & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

hallar un valor de k para el cual $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ existe.

Solución

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x-k)^2 = (-1-k)^2 = k^2 + 2k + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x-k) = -1-k$$

Entonces por el teorema 1:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = L$$

para algún número real L

$$\Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 = -1 - k$$

$$\Leftrightarrow (k+2)(k+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -2 \text{ o } k = -1$$

Por lo que, para $k = -2$ o $k = -1$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ existe, ya que:

$$k = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 \text{ y } 1 \text{ es número real}$$

$$k = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \text{ y } 0 \text{ es número real}$$

Nota

Si la ecuación que resultó en el ejemplo anterior al igualar los límites laterales, hubiese tenido raíces complejas (no reales) automáticamente se hubiera afirmado que dichos límites no existen y en consecuencia $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ no hubiese existido.

Ejemplo 6

Calcular el $\lim_{x \rightarrow 2} [x^2 - 2]$ si existe.

(Nota: El paréntesis $[]$ en este caso denota la función parte entera)

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 2} [x^2 - 2] = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ \sqrt{3} < x < 2}} [x^2 - 2] \Rightarrow$$

Cuando $x \rightarrow 2^-$, los valores de x se aproximan arbitrariamente a 2 por la izquierda, esto permite tomar a x en el intervalo $[\sqrt{3}, 2[$ o sea $\sqrt{3} < x < 2$ y entonces:

$$\sqrt{3} < x < 2 \Rightarrow 3 < x^2 < 4 \Rightarrow 1 < x^2 - 2 < 2 \Rightarrow [x^2 - 2] = 1 \text{ para } x \text{ en } [\sqrt{3}, 2[$$

$$\text{Por lo que, } \lim_{x \rightarrow 2^-} [x^2 - 2] = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ \sqrt{3} < x < 2}} [x^2 - 2] = \lim_{x \rightarrow 2} (1) = 1$$

Por otra parte, para calcular el límite de esta función cuando $x \rightarrow 2^+$, se toma a x en el intervalo $]2, \sqrt{5}[$ o sea $2 < x < \sqrt{5}$ y entonces para cada x en $]2, \sqrt{5}[$ se tiene que:

$$2 < x < \sqrt{5} \Rightarrow 4 < x^2 < 5 \Rightarrow 2 < x^2 - 2 < 3 \Rightarrow [x^2 - 2] = 2$$

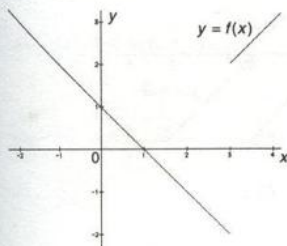
$$\text{De donde: } \lim_{x \rightarrow 2^+} [x^2 - 2] = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ 2 < x < \sqrt{5}}} [x^2 - 2] = \lim_{x \rightarrow 2} (2) = 2$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x^2 - 2] \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} [x^2 - 2]$, entonces por el teorema 1, $\lim_{x \rightarrow 2} [x^2 - 2]$ no existe.

Ejemplo 7

¿Existe el $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 3|}$?

Solución



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 3|} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 3|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x - 3 < 0}} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 3|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 1)}{-(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} -(x - 1) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 3|} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 3|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x - 3 > 0}} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 3|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 1)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 1) = 2 \end{aligned}$$

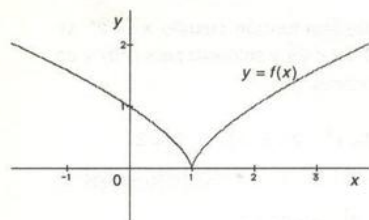
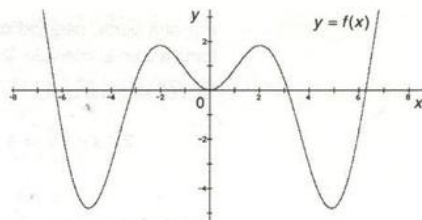
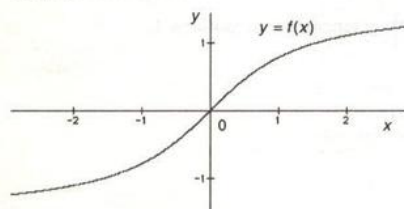
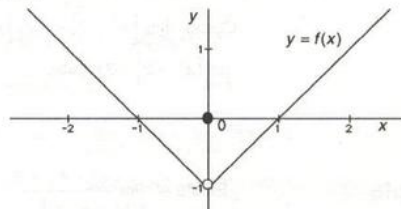
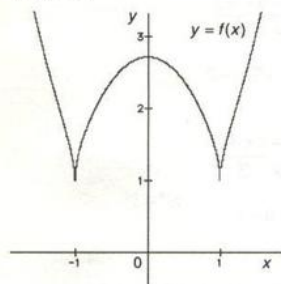
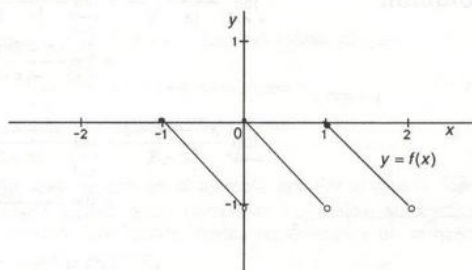
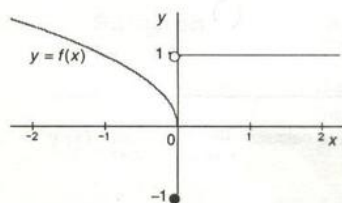
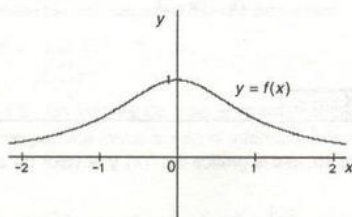
Como $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 3|} \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 3|}$, entonces por el teorema 1,

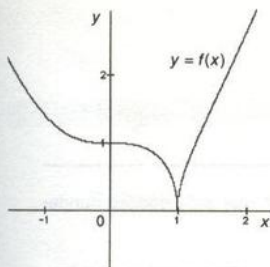
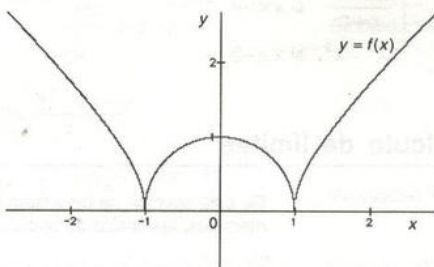
$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 3|}$ no existe.

Ejercicios 4.1

En los ejercicios del 1 al 10, use la gráfica de $f(x)$ y el valor de a dado para calcular $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

1. $a = 1$ 2. $a = 0$ 3. $a = 0$ 4. $a = 1$ 5. $a = -1$ 6. $a = 0$ 7. $a = 0$ 8. $a = 0$ 

9. $a = 1$ 10. $a = 0$ 

En los ejercicios del 11 al 40, calcule cada límite en caso de que exista.

11. $\lim_{x \rightarrow 3} (x + 2)$

12. $\lim_{x \rightarrow 1} 4$

13. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2)$

14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

16. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{x^2-9}$

17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

18. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|2+h|-2}{h}$

19. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}}$

20. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x-2}$

21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

22. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{1-x}}$

23. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$

24. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$

25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x-2|-2}{x}$

26. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-x-1}{x-1}$

27. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

28. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

29. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}$

30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2-1}{x}$

31. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ para $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

32. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ para $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}$

34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

35. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$

36. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$

37. $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$

38. $\lim_{x \rightarrow 1} [x-1]$

39. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-[x])$

40. $\lim_{x \rightarrow 1} [x^2-1]$

Del 41 al 45, encuentre un valor de k para el cual el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.

41. $a = 2$ y $f(x) = \begin{cases} k-x & \text{si } x < 2 \\ x+2k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

42. $a = -1$ y $f(x) = \begin{cases} k-x & \text{si } x < -1 \\ \sqrt{x-k} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

43. $a = 1$ y $f(x) = \begin{cases} k-x & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt[3]{x}-k & \text{si } x > 1 \end{cases}$

44. $a = k$ y $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < k \\ x^2 & \text{si } x \geq k \end{cases}$

$$45. a = -2 \text{ y } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{si } x < -2 \\ 3x^2 - k^2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

4.2 Cálculo de límites

Propiedades fundamentales

En esta sección se calcularán límites aplicando sus propiedades fundamentales, las cuales se enuncian enseguida,

Supóngase que a es un número real y que f y g son funciones para las cuales, los límites

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

existen, entonces:

1

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k \text{ para toda constante } k.$$

2

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

3

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

4

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

5

$$\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ para toda constante } k$$

6

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

7

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

8

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n \text{ en donde } n \text{ es un entero positivo.}$$

9

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \text{ en donde } n \text{ es un entero positivo y } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0 \text{ si } n \text{ es par.}$$

Estas propiedades se demuestran rigurosamente en cursos de cálculo avanzado. En la sección 4.4 (opcional) de este texto se demuestran algunas de esas propiedades.

Ejemplo 1

Calcular el $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5)$ usando las propiedades.

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 \quad \text{Propiedades 3 y 4}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\lim_{x \rightarrow 2} x \right)^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5 && \text{Propiedades 5 y 8} \\
 &= 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 && \text{Propiedades 1 y 2} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2Calcular el $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 4}$ **Solución**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 4} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x - 3)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x - 4)} && \text{Propiedad 7} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + \lim_{x \rightarrow -1} 2x - \lim_{x \rightarrow -1} 3}{\lim_{x \rightarrow -1} x - \lim_{x \rightarrow -1} 4} && \text{Propiedades 3 y 4} \\
 &= \frac{(-1)^2 + 2(-1) - 3}{-1 - 4} && \text{¿Por qué?} \\
 &= \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3Calcular el $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2 + 3}{x + 2}}$ aplicando propiedades.**Solución**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2 + 3}{x + 2}} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{x + 2}} && \text{Propiedad 9} \\
 &= \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)}} && \text{Propiedad 7} \\
 &= \sqrt{\frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 3}{\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 2}} && \text{Propiedad 3} \\
 &= \sqrt{\frac{\left(\lim_{x \rightarrow 1} x \right)^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 3}{\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 2}} && \text{Propiedad 8} \\
 &= \sqrt{\frac{1^2 + 3}{1 + 2}} && \text{Propiedades 1 y 2} \\
 &= \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4Calcular el $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}$ aplicando propiedades.

Solución

En este caso, la propiedad 7 no se puede aplicar directamente porque el límite del denominador es cero cuando $x \rightarrow 3$; o sea, porque

$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 0$. Además, al sustituir la x por el 3 en el cociente $\frac{x-3}{x^2-9}$ se obtiene un resultado sin sentido como se muestra enseguida:

$$\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{3-3}{3^2-9} = \frac{3-3}{9-9} = \frac{0}{0}$$

La indeterminación $\frac{0}{0}$ obtenida en este caso y en muchos otros, se elimina factorizando el denominador. Con ello se calcula el límite deseado como se muestra enseguida

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3}$$

$$x \rightarrow 3 \Rightarrow x \neq 3 \Rightarrow x-3 \neq 0 \Rightarrow (x-3)$$

$$\text{se puede cancelar en } \frac{x-3}{(x-3)(x+3)}$$

Propiedad 7

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} (x+3)}$$

Propiedad 3

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 3}$$

Propiedades 1 y 2

$$= \frac{1}{3+3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

Ejemplo 5**Solución**

Calcular el $\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{x-1}\right)$ aplicando propiedades.

En este caso, la propiedad 6 no se puede aplicar porque el límite del segundo factor no existe cuando $x \rightarrow 1$, o sea porque $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1}\right)$ no

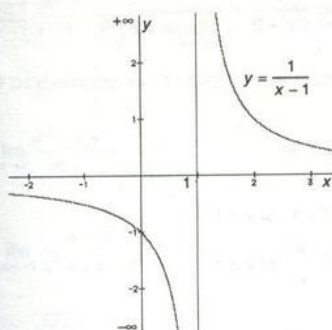
existe, ya que de acuerdo con la gráfica de $y = \frac{1}{x-1}$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right) = +\infty$$

lo cual no es un número real. En este caso lo aconsejable es efectuar operaciones algebraicas como sigue

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2(x-1)}$$

**Nota**

Al calcular límites mediante sustitución directa de la variable por una constante en un cociente algebraico, frecuentemente resulta $\frac{k}{0}$ en donde k es un número real distinto de cero. Cuando ello ocurre, se da por hecho que eso es ∞ . O sea, $\frac{k}{0} = \pm\infty$ si $k \neq 0$. En cuyo caso el límite no existe, porque ∞ no es un número real. Por ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

Por lo que, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$ no existe.

Ejemplo 6

Calcular el $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ en donde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{si } x \neq 4 \\ 0 & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

Solución

$x \rightarrow 4$ significa que x se aproxima a 4 por la izquierda y por la derecha con valores distintos de 4. O sea, $x \neq 4$ cuando $x \rightarrow 4$. Por lo que,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \text{ cuando } x \rightarrow 4. \text{ De donde:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

(Se multiplicó por el conjugado del numerador para eliminar la indeterminación

$$\frac{0}{0} \text{ que se obtiene al sustituir la } x \text{ por el } 4 \text{ en } \frac{\sqrt{x}-2}{x-4})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x^2(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1}{\left(\lim_{x \rightarrow 1} x\right)^2}$$

$$= \frac{1+1}{1^2} = 2$$

Propiedad 7

Propiedades 3 y 8

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} x} + 2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 7Calcular el $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ para

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución

Se calculan los límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} 1 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} 1 - \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1} x} = 1 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

¿Qué concluye?

Ejercicios 4.2

En los ejercicios del 1 al 20, calcule el límite aplicando propiedades.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x^2 + 2x - 4)$

2. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 1)$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} (3 - x)(x + 1)$

4. $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$

5. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$

6. $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} (3x^2 + 2x + 1)^2$

7. $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{8x^3 + 1}{2x + 1}$

8. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{x + 8}$

9. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt[3]{x} + 1}$

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^3 - 1}$

11. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x + 1}$

12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{x - 1}$

13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt[5]{x} - 1}$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$

15. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$

16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^{3/2}}{x-1}$

17. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} \right)$

18. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)} \right)$

$$19. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3}{x-1} - \frac{1}{x^2(x-1)} \right)$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 1} \left(x - \frac{1}{x^5} \right) \left(\frac{1}{x-1} \right)$$

En los ejercicios del 21 al 40, calcule el límite si existe.

$$21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x^2 + x - 2}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{x - \frac{1}{2}}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2 + 2x - 3}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \frac{1}{x-1}}{\frac{x}{x-1} + 1}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1/2}}{x}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^{1/2} - 2^{1/2}}{x}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)^3 + 1}{x}$$

$$31. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$$

$$32. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h-1| - 1}{h}$$

$$33. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^3 - x}{x^2 - 1}}$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{|x-2|} + \frac{1}{x-2} \right)$$

$$35. \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{4}{x^2 - 4} \right)$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{x-3} - \frac{6x}{x^2 - 9} \right)$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x}}{x-5}$$

$$39. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$40. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

En los ejercicios del 41 al 50, calcule el límite.

$$41. \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ para } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$42. \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \text{ para } g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 - 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$43. \lim_{x \rightarrow 0} h(x) \text{ para } h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4-x} - 2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$44. \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ para } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x < -3 \\ 2x - 6 & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$$

$$45. \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ para } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} & \text{si } x < -2 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

$$46. \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} g(x) \text{ para } g(x) = \begin{cases} \frac{3x-2}{2-x} & \text{si } x < \frac{2}{3} \\ 1-9x^2 & \text{si } x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$47. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x+3| - 3}{x}$$

$$48. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$$

$$49. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ para } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{2-x} & \text{si } x < 2 \\ x - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$50. \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \text{ para } g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{1-x} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

51. Encuentre un número a y dos funciones f y g para las cuales $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ no existan pero que $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ exista.
52. Encuentre un número a y dos funciones f y g para las cuales $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ no existan pero que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$ exista.
53. Encuentre un número a y una función f para la cual $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ exista pero que $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n$ exista si n es par.
54. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L$, ¿existe $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$?
55. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ no existe, ¿existe $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$?

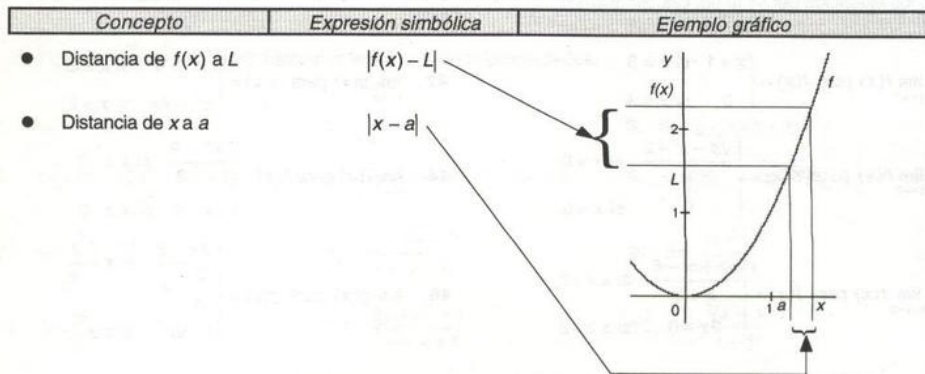
4.3 Definición formal de límite

En la sección 4.1 se mencionó esto:

$f(x)$ se aproxima a L si x se aproxima a a .

Ello en términos del concepto de distancia, equivale a decir que

La distancia de $f(x)$ a L se puede hacer tan pequeña como se quiera a condición de hacerse suficientemente pequeña la distancia de x a a .

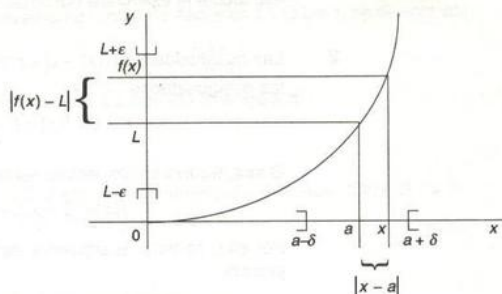


Por tanto, decir que:

$f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a a

equivale a decir que:

$|f(x) - L|$ puede hacerse tan pequeño como se quiera a condición de que $|x - a|$ pueda hacerse suficientemente pequeño



Precisando se tiene que:

$f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a a con valores distintos de a .

equivale a decir que:

Para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

Por ello, el límite de una función se define formalmente así

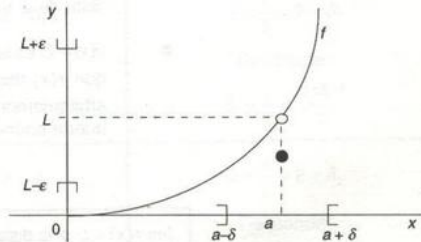
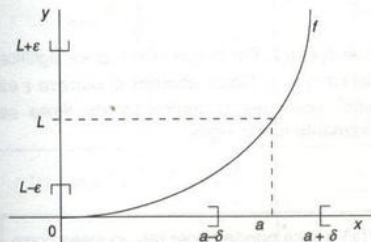
Definición 1

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L , denotado ello así

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$



En esta definición téngase en cuenta lo siguiente:

Observaciones 1

El hecho de que $0 < |x - a|$ y $x \in \mathcal{D}_f$ significa que $x - a \neq 0$ y $x \in \mathcal{D}_f$; o sea, $x \neq a$ y $x \in \mathcal{D}_f$. Es decir, la función puede no estar definida en $x = a$ sin que ello afecte la existencia del límite L .

- 2 Las desigualdades $|f(x) - L| < \varepsilon$ y $|x - a| < \delta$ equivalen respectivamente a las desigualdades

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \text{ y } a - \delta < x < a + \delta$$

O sea, equivalen respectivamente a decir que

$$f(x) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[\text{ y } x \in]a - \delta, a + \delta[$$

Por ello, se tiene la siguiente definición formal de límite equivalente a la primera

Definición 2

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

si para cada número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \text{ siempre que } a - \delta < x < a + \delta$$

en donde $x \in \mathcal{D}_f$ y posiblemente $x \neq a$

O bien:

Definición 3

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in \mathcal{D}_f$ y posiblemente $x \neq a$, entonces

$$x \in]a - \delta, a + \delta[\Rightarrow f(x) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$$

Observación 3

- $|x - a|$ es la distancia de x a a . Por lo que $|x - a| < \delta$ significa que la distancia de x a a es menor que el número δ ; o brevemente, x dista de a menos que δ .
- $|f(x) - L|$ es la distancia de $f(x)$ a L . Por lo que, $|f(x) - L| < \varepsilon$ significa que $f(x)$ dista de L menos que ε . Como además el número ε es arbitrariamente pequeño, entonces la definición de límite se puede enunciar intuitivamente como sigue:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si la distancia de $f(x)$ a L se puede hacer tan pequeña como se quiera a condición de que la distancia de x a a sea suficientemente pequeña sin llegar a ser cero

Notación

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ también se denota como

$$\lim_a f = L$$

y se lee brevemente "límite de f en a es L ". O bien, se denota así

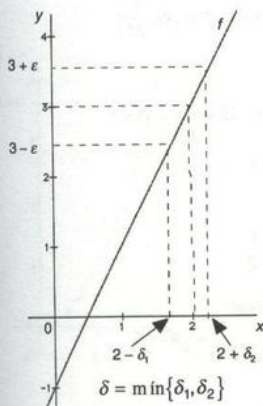
$$f(x) \rightarrow L_{x \rightarrow a}$$

y se lee " f de x tiende a L cuando x tiende a a "

Ejemplo 1

Dado $\varepsilon = 0.007$ encontrar un número $\delta > 0$ tal que $|f(x) - 3| < \varepsilon$ si $0 < |x - 2| < \delta$ en donde $f(x) = 2x - 1$

Método 1



(Gráficamente). Recuérdese que

$$|f(x) - 3| < \varepsilon \text{ si } 0 < |x - 2| < \delta$$

es equivalente a:

$$x \in]2 - \delta, 2 + \delta[, x \neq 2 \Rightarrow f(x) \in]3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon[$$

Por ser f una función biyectiva, f tiene una inversa f^{-1} la cual se determina despejando x así:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Por lo que, $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$. Entonces los valores $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ se obtienen como sigue

Por un lado:	Por otro lado:	Así que:
$f^{-1}(3 - \varepsilon) = \frac{3 - \varepsilon + 1}{2} = 2 - \frac{\varepsilon}{2}$	$f^{-1}(3 - \varepsilon) = 2 - \delta_1$	$2 - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \delta_1$ De donde: $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{0.007}{2}$
$f^{-1}(3 + \varepsilon) = \frac{3 + \varepsilon + 1}{2} = 2 + \frac{\varepsilon}{2}$	$f^{-1}(3 + \varepsilon) = 2 + \delta_2$	$2 + \frac{\varepsilon}{2} = 2 + \delta_2$ De donde: $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{0.007}{2}$

En este caso $\delta_1 = \delta_2$, esto no siempre ocurre; por lo que es aconsejable calcular ambos números. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se obtiene el valor

$$\delta = \frac{0.007}{2} \text{ que resuelve el ejemplo (Compruébelo).}$$

Método 2

(Análiticamente) Para obtener el valor del número δ se toma como guía el siguiente modelo

$$|f(x) - L| = |g(x)(x - a)| = |g(x)||x - a| \leq M|x - a| < \varepsilon$$

en donde el número $M > 0$ es una cota superior de la función $g(x)$; o sea $|g(x)| \leq M$.

- Si $g(x)$ es constante entonces $M = |g(x)|$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$
- En otro caso M se obtiene a partir de suponer que $|x - a| < \delta_0$ en donde δ_0 es un número en el intervalo $]0, 1[$. Por lo general se toma $\delta_0 = 1$ y si ello funciona ¡que felicidad! si no se toma $0 < \delta_0 < 1$

Habiendo encontrado el valor de M se toma $\delta = \min\left\{\delta_0, \frac{\varepsilon}{M}\right\}$

Así que, usando el modelo analítico se tiene

$$|f(x) - L| = |(2x - 1) - 3| = |2(x - 2)| = 2|x - 2| < \varepsilon$$

$$g(x) = 2 \quad \quad \quad M = |g(x)| = 2$$

Nótese que:

$$2|x - 2| < \varepsilon \text{ si } |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Entonces, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{0.007}{2}$ se cumple que

$$|f(x) - 3| < \varepsilon \text{ si } 0 < |x - 2| < \delta$$

Ejemplo 2

Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5$

Solución

De acuerdo con la definición de límite, se debe demostrar que

Para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$$

Para ello, se usará en esta ocasión el modelo analítico del ejemplo 1. Observe:

$$|f(x) - L| = |(3x + 2) - 5| = |3x - 3| = |3(x - 1)| = 3|x - 1|$$

Considere ahora $\varepsilon > 0$. Nótese que

$$3|x - 1| < \varepsilon \text{ si } |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Entonces, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ se cumple que

$$|(3x+2)-5| < \varepsilon \text{ si } 0 < |x-1| < \delta$$

y por tanto $\lim_{x \rightarrow 1} (3x+2) = 5$

Ejemplo 3

Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

Solución

Se hará la demostración aplicando la definición formal de límite; por lo que, se demostrará que:

Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - 2| < \delta$$

De acuerdo con el ejemplo 1, para cada $\varepsilon > 0$ hay dos métodos de encontrar el número $\delta > 0$ los cuales se desarrollan enseguida.

1

Método gráfico. Nótese que el punto $x = 2$ hacia el cual tienden los valores de x está en el intervalo $]0, \infty[$. Por ello, considérese la inversa f^{-1} de f en el intervalo $]0, \infty[$, la cual se obtiene como sigue

$$y = f(x) \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

Tomando $2 - \delta_1$ y $2 + \delta_2$ respectivamente como las imágenes inversas de $4 - \varepsilon$ y $4 + \varepsilon$ se tiene que

$$f^{-1}(4 - \varepsilon) = \sqrt{4 - \varepsilon} = 2 - \delta_1 \Rightarrow \delta_1 = 2 - \sqrt{4 - \varepsilon}$$

$$f^{-1}(4 + \varepsilon) = \sqrt{4 + \varepsilon} = 2 + \delta_2 \Rightarrow \delta_2 = \sqrt{4 + \varepsilon} - 2$$

Entonces se toma $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} = \min\{2 - \sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon} - 2\}$. Con este valor para δ se cumple que

$$x \in]2 - \delta, 2 + \delta[\text{ con } x \neq 2 \Rightarrow f(x) \in]4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon[$$

lo cual es equivalente con

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon.$$

Por lo que, $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

2

Método analítico.

$$|x^2 - 4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2||x-2| < 4|x-2|$$

$$g(x) = x+2 \quad \uparrow \quad |g(x)| < M = \quad \uparrow$$

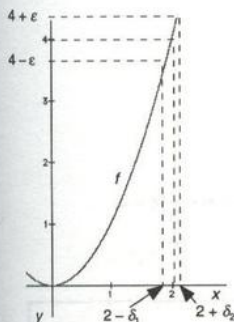
M se obtuvo así:

$$|x - 1| < 1 = \delta_0 \Rightarrow -1 < x - 1 < 1 \Rightarrow -1 + 3 < x - 1 + 3 < 1 + 3$$

$$\Rightarrow 2 < x + 2 < 4 \Rightarrow |x + 2| < 4 = M$$

Considérese $\varepsilon > 0$. Nótese que

$$4|x - 2| < \varepsilon \text{ siempre que } |x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}$$



Entonces, tomando $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{4} \right\}$ se cumple que

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - 2| < \delta,$$

y por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

Ejemplo 4

Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$ en donde n es un entero positivo

Solución

Se usará una variante del modelo analítico. En este caso:

$$|x^n - 0| = |x^n| = |x|^n$$

Considérese $\varepsilon > 0$. Nótese que

$$|x|^n < \varepsilon \text{ si } |x - 0| = |x| < \sqrt[n]{\varepsilon}$$

Entonces, tomando $\delta = \sqrt[n]{\varepsilon}$ se cumple que

$$|x^n - 0| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - 0| < \delta$$

y por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$

Ejemplo 5

Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$

Solución

En este caso se tiene

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3-x}{3x} \right| = \left| \left(\frac{1}{3x} \right) (3-x) \right| = \left| \frac{1}{3x} \right| |3-x| < \frac{1}{8} |x-3|$$

$$g(x) = \frac{1}{3x} \quad |g(x)| < M = \frac{1}{8}$$

M se obtuvo así:

$$\begin{aligned} |x-3| < \delta_0 = \frac{1}{3} &\Rightarrow -\frac{1}{3} < x-3 < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} + 3 < x-3+3 < \frac{1}{3} + 3 \\ &\Rightarrow \frac{8}{3} < x < \frac{10}{3} \Rightarrow 0 < \frac{8}{3x} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{3x} < \frac{1}{8} \Rightarrow \left| \frac{1}{3x} \right| < \frac{1}{8} = M \end{aligned}$$

Considérese ahora $\varepsilon > 0$. Nótese que

$$\frac{1}{8} |x-3| < \varepsilon \text{ siempre que } |x-3| < 8\varepsilon$$

Por lo que, tomando $\delta = \min \left\{ \frac{1}{3}, 8\varepsilon \right\}$ se cumple que

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x-3| < \delta$$

y por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$

Ejemplo 6

Demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} k = k$ en donde k es una constante.

Solución

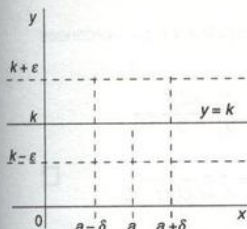
En este caso

$$|k - k| = |0| = 0$$

Considérese $\varepsilon > 0$. Entonces tomando cualquier $\delta > 0$ se cumple que

$$|k - k| < \varepsilon \text{ si } 0 < |x - a| < \delta$$

y por lo tanto $\lim_{x \rightarrow a} k = k$

**Lema 1**

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$

Demostración

En este caso

$$|f(x) \cdot g(x) - 0| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| |g(x)|$$

Pero $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, entonces para cada número $\varepsilon > 0$ existen números $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$|f(x)| = |f(x) - 0| < \sqrt{\varepsilon} \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ y } x \in \mathcal{D}_f$$

$$|g(x)| = |g(x) - 0| < \sqrt{\varepsilon} \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ y } x \in \mathcal{D}_g$$

Entonces, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que

$$|f(x) \cdot g(x) - 0| = |f(x)| |g(x)| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta \text{ y } x \in \mathcal{D}_g$$

Por lo tanto, de la definición de límite se tiene que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$ $\square$

Lema 2

Supóngase que g es una función para la cual

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \neq 0$$

existe, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}$$

Demostración

Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \neq 0$ existe, entonces:

- Existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|L| - |g(x)| < |g(x) - L| < \frac{|L|}{2} \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_1. \text{ De donde}$$

$$\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|L|} \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ y } g(x) \neq 0$$

- Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x) - L| < \frac{\varepsilon |L|^2}{2} \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_2$$

Tomando $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que si $|x - a| < \delta$ y $x \in \mathcal{D}_1$, entonces

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L} \right| = \left| \frac{L - g(x)}{L \cdot g(x)} \right| = \frac{1}{|L|} \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot |g(x) - L| < \frac{1}{|L|} \cdot \frac{2}{|L|} \cdot \frac{\varepsilon |L|^2}{2} = \varepsilon$$

Por lo que, por la definición de límite se tiene que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}$. $\square$

Teorema 1

Supóngase que f y g son funciones para las cuales, los límites

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

existen, entonces

$$1. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

Demostración

Supóngase que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ existen. Entonces:

1. Para cada número $\varepsilon > 0$ existen números $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$|f(x) - K| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ y } x \in \mathcal{D}_f$$

$$|g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ y } x \in \mathcal{D}_g$$

Tomando $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ se cumple que si $0 < |x - a| < \delta$ y $x \in \mathcal{D}_{f+g}$ entonces

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (K + L)| &= |(f(x) - K) + (g(x) - L)| \\ &\leq |f(x) - K| + |g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo que, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = K + L = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

2. Si $K = L = 0$, por el lema 1

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Sin pérdida de generalidad supóngase que $K \neq 0$. Nótese que

$$|f(x) \cdot g(x) - KL| = |f(x) \cdot g(x) - Kg(x) + Kg(x) - KL|$$

$$\begin{aligned}
 &= |g(x)(f(x) - K) + K(g(x) - L)| \\
 &\leq |g(x)(f(x) - K)| + |K(g(x) - L)| \\
 &= |g(x)| |f(x) - K| + |K| |g(x) - L|
 \end{aligned}$$

Pero $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ entonces para cada número $\varepsilon > 0$ existen números $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$\bullet \quad |g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2|K|} \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ y } x \in \mathcal{D}_g$$

De donde

$$|g(x)| = |g(x) - L + L| \leq |g(x) - L| + |L| < \frac{\varepsilon}{2|K|} + |L| = \frac{\varepsilon + 2|K||L|}{2|K|}$$

$$\bullet \quad |f(x) - K| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{2|K|}{\varepsilon + 2|K||L|} = \frac{|K|\varepsilon}{\varepsilon + 2|K||L|} \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ y } x \in \mathcal{D}_f$$

Así que, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
 |f(x)g(x) - KL| &\leq |g(x)||f(x) - K| + |K||g(x) - L| \\
 &< \left(\frac{\varepsilon + 2|K||L|}{2|K|} \right) \left(\frac{|K|\varepsilon}{\varepsilon + 2|K||L|} \right) + |K| \left(\frac{\varepsilon}{2|K|} \right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

siempre que $0 < |x - a| < \delta$ y $x \in \mathcal{D}_{fg}$. Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = K \cdot L = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

3. De la parte 2 de este teorema y el lema 2 se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right) (f(x)) = \left(\frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \square$$

Lema 3

$$1. a < \varepsilon \text{ para todo } \varepsilon > 0 \Rightarrow a \leq 0$$

$$2. |a| < \varepsilon \text{ para todo } \varepsilon > 0 \Rightarrow a = 0$$

Demostración

1. Si $a > 0$, como $1 > \frac{1}{2}$, entonces $a > \frac{1}{2}a$. O sea, existe $\varepsilon = \frac{1}{2}a$ tal que $a > \varepsilon$ lo cual es una contradicción.

2. Por la parte 1 de este teorema se tiene que

$$|a| < \varepsilon \text{ para todo } \varepsilon > 0 \Rightarrow |a| \leq 0$$

De donde $|a| = 0$. Por lo que $a = 0$ □

Teorema 2⁺

Si $f(x) \leq g(x)$ para todo x en un intervalo abierto I que contiene a un

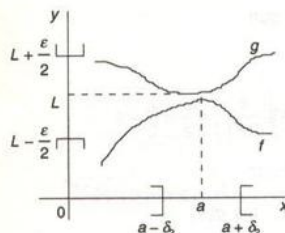
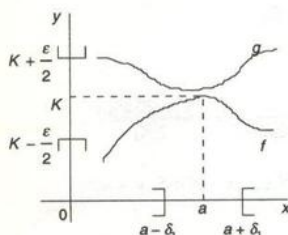
punto a (excepto quizá en $x = a$) y si los límites

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

existen, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Demostración



Supóngase que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existen números $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

- $K - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < K + \frac{\varepsilon}{2}$ si $x \in]a - \delta_1, a + \delta_1[$, $x \neq a$ y $x \in \mathcal{D}_f$
- $L - \frac{\varepsilon}{2} < g(x) < L + \frac{\varepsilon}{2}$ si $x \in]a - \delta_2, a + \delta_2[$, $x \neq a$ y $x \in \mathcal{D}_g$

Sin pérdida de generalidad supóngase que δ_1 y δ_2 se escogieron de modo que los intervalos $]a - \delta_1, a + \delta_1[$ y $]a - \delta_2, a + \delta_2[$ están contenidos en I . Tómese $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces

$$K - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) \leq g(x) < L + \frac{\varepsilon}{2} \text{ siempre que } x \in]a - \delta, a + \delta[\text{ y } x \neq a$$

De donde $K - L < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Entonces por el lema 3, $K - L \leq 0$. Por lo que $K \leq L$. O sea, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ $\square$

Teorema 3

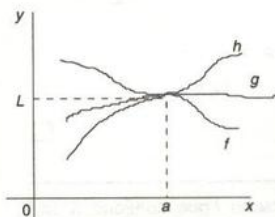
Teorema del emparedado. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x en un intervalo abierto I que contiene a a (excepto quizá en $x = a$) y si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

con $L \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

Demostración



Análogamente a lo hecho en la demostración del teorema 2; para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon \text{ siempre que } x \in]a - \delta, a + \delta[\cap I \text{ y } x \neq a$$

De donde $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ $\square$

Ejercicios 4.3

En los ejercicios del 1 al 5, encuentre $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

1. $0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < 0.01$ en donde $f(x) = x + 2$
2. $0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < 0.005$ en donde $f(x) = 3x - 1$
3. $0 < |x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < 0.07$ en donde $f(x) = x^2$
4. $0 < |x + 3| < \delta \Rightarrow \left| f(x) + \frac{1}{3} \right| < 0.0003$ en donde $f(x) = \frac{1}{x}$
5. $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < 0.05$ en donde $f(x) = \sqrt{x}$ ✕

En los ejercicios del 6 al 20, demuestre el límite dado usando la definición con $\varepsilon - \delta$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$
 7. $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4$
 8. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) = 0$
 9. $\lim_{x \rightarrow -2} (3 - x) = 5$
 10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$
 11. $\lim_{x \rightarrow -3} x^2 = 9$
 12. $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - x) = 0$
 13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$
 14. $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$
 15. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$
 16. $\lim_{x \rightarrow 3} |x - 2| = 1$
 17. $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$
 18. $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1$
 19. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$
 20. $\lim_{x \rightarrow 0} 2k = 2k$
21. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, demuestre que la función f está acotada en un intervalo abierto que contiene a a .
22. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$, demuestre que $L_1 = L_2$

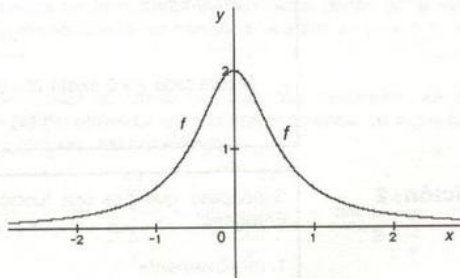
En los ejercicios del 23 al 25, demuestre lo que se indica suponiendo que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen.

23. $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ en donde k es una constante.
24. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
25. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$ en donde n es un entero positivo.
26. Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = u_0 = g(a)$ y $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$, demuestre que $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(u_0)$

4.4 Límites al infinito

Considérese la gráfica de la función $f(x) = \frac{2}{3x^2 + 1}$

x	$f(x)$
0	2
± 1	0.5
± 2	0.1
± 3	0.07
± 10	0.006
± 100	0.00006



En la tabla y en la gráfica de la función f , se observa que cuando x crece o decrece ilimitadamente, los valores $f(x)$ se aproximan o tienden a cero. Esto se expresa así:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

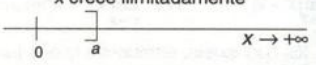
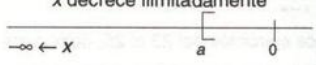
o respectivamente así

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Cada uno de estos límites es un límite al infinito y respectivamente se leen

- "límite de $f(x)$ cuando x tiende a más infinito, es 0"
- "límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito, es 0"

Cabe mencionar que $+\infty$ (o $-\infty$) no es un número, es sólo un símbolo que se usa para indicar que alguna de las variables crece (o decrece) ilimitadamente. En particular:

Notación:	Se lee:	Significa:
$x \rightarrow +\infty$	x tiende a más infinito	x crece ilimitadamente 
$x \rightarrow -\infty$	x tiende a menos infinito	x decrece ilimitadamente 

Los límites al infinito se definen así:

Definición 1

Supóngase que f es una función definida en algún intervalo $]a, +\infty[$. Entonces

1. Intuitivamente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

si cada vez que x crece con valores grandes y positivos, $f(x)$ se aproxima a L .

2. Formalmente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ si } x > N$$

Definición 2

Supóngase que f es una función definida en algún intervalo $]-\infty, a[$. Entonces:

1. Intuitivamente

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

si cada vez que x decrece con valores pequeños y negativos, $f(x)$ se aproxima a L

2. Formalmente

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N < 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ si } x < N$$

Ejemplo 1

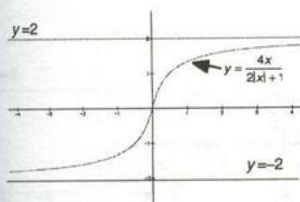
Calcular

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2|x|+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2|x|+1}$

Solución

Tomando en cuenta la gráfica de la función $y = \frac{4x}{2|x|+1}$, intuitivamente se tiene que:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2|x|+1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2|x|+1} = -2$$

Notas

En la práctica se toma en cuenta lo siguiente:

1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^n} = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{c}{x^n} = 0$$

en donde n es un número entero positivo y $c \neq 0$

2

Las propiedades fundamentales de los límites dadas en la sección 4.2 son también válidas cuando se cambia $x \rightarrow a$ por $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$

3

Para calcular límites al infinito de funciones racionales, se dividen el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x que aparece en la expresión racional. Así por ejemplo:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2|x|+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4x}{x}}{\frac{2|x|}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4x}{x}}{\frac{2|x|}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2 + \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 4}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{4}{2+0} = 2$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2|x|+1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4x}{x}}{\frac{2|x|}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4x}{x}}{\frac{2|x|}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{-2 + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 4}{\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}} = \frac{4}{-2+0} = -2 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{3x^3 - 2}$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{3x^3 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3} - \frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}}{3 - \frac{2}{x^3}} = \frac{0}{3} = 0$$

Ejemplo 3

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Solución

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-2}{\sqrt{1}} = -2 \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Demostrar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$

Solución

En este caso, si $x > 1$ entonces $x-1 > 0$, de donde

$$\left| \frac{1}{x-1} - 0 \right| = \left| \frac{1}{x-1} \right| = \frac{1}{x-1}$$

Para cada $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{x-1} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 < \varepsilon(x-1) \Leftrightarrow \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} < x$$

Así que, tomando $N = \max \left\{ 1, \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \right\}$ se tiene que

$$\left| \frac{1}{x-1} - 0 \right| < \varepsilon \text{ siempre que } x > N$$

De donde por la definición formal de límite al infinito se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

Asíntotas horizontales

Definición 3

La recta $y = L$ es una *asíntota horizontal* de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \text{ o } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Ejemplo 5

Hallar las asíntotas horizontales de la gráfica de la función

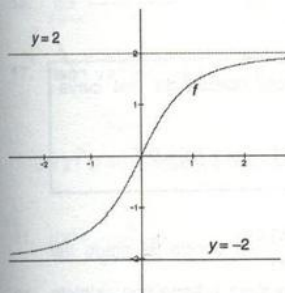
$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Solución

En el ejemplo 3 fue visto que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -2$$

entonces la recta $y = -2$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f . Por otra parte:



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1}} = 2 \end{aligned}$$

O sea, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 2$. Entonces la recta $y = 2$ también es una asíntota horizontal de la gráfica de f .

Asíntotas oblicuas

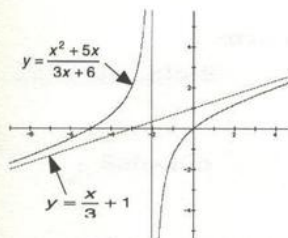
Considérese la función racional $y = \frac{x^2 + 5x}{3x + 6}$ y la siguiente división

$$\begin{array}{r} \frac{x}{3} + 1 \\ 3x + 6 \overline{) x^2 + 5x} \\ \underline{-x^2 - 2x} \\ 3x + 0 \\ \underline{-3x - 6} \\ -6 \end{array}$$

Así que, $\frac{x^2+5x}{3x+6} = \frac{x}{3} + 1 - \frac{6}{3x+6}$. O sea, $y = \frac{x}{3} + 1 - \frac{6}{3x+6}$. De donde:

$$y - \left(\frac{x}{3} + 1\right) = -\frac{6}{3x+6}$$

Por lo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(y - \left(\frac{x}{3} + 1\right)\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{6}{3x+6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\frac{6}{x}}{3 + \frac{6}{x}} = -\frac{0}{3} = 0$



O sea, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(y - \left(\frac{x}{3} + 1\right)\right) = 0$. Este límite significa que los valores de la diferencia $y - \left(\frac{x}{3} + 1\right)$ se aproximan cada vez más a cero cuando x crece ilimitadamente. Geométricamente, ello significa que la gráfica de $y = \frac{x^2+5x}{3x+6}$ se aproxima cada vez más a la gráfica de la recta $y = \frac{x}{3} + 1$ cuando x crece ilimitadamente; por lo que esta recta es una asíntota de la gráfica de $y = \frac{x^2+5x}{3x+6}$ y por el hecho de estar inclinada dicha recta es una asíntota oblicua.

Definición 4

La recta $y = ax + b$ con $a \neq 0$ es una *asíntota oblicua* de una curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \text{ o } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Nota

Cada función racional de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ en donde el grado del polinomio $p(x)$ excede al grado del polinomio $q(x)$ en 1, tiene una asíntota oblicua.

Ejemplo 6

Encontrar la asíntota oblicua de la curva $y = \frac{x^2-7}{x+3}$

Solución

$$\begin{array}{r} x-3 \\ x+3 \overline{) x^2-7} \\ \underline{-x^2-3x} \\ -3x-7 \\ \underline{3x+9} \\ 2 \end{array}$$

Así que $y = x - 3$ es una asíntota de $y = \frac{x^2-7}{x+3}$ porque:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 7}{x + 3} - (x - 3) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

Ejercicios 4.4

En los ejercicios del 1 al 20, calcule el límite al infinito.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 1}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3 + x}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x^2 + 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3 + 1}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 + 1}$

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{|x| + 1}$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2 + x} - \sqrt{x})$

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{1 + x} + \sqrt[3]{-x})$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 1}{\sqrt{3x^2 - 2}}$

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + 2}}$

12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 + \sqrt{-x}}$

15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + x}{x - \sqrt{x}}$

16. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{8}{x^2} \right)$

17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x)$

18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 1} - x}{1 - x}$

19. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

20. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x^2 - 1} \right)$

Del 21 al 40, encuentre las asíntotas horizontales de la gráfica de cada función.

21. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$

22. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x}}$

23. $g(x) = 3 - \frac{1}{x}$

24. $h(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$

25. $g(x) = (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$

26. $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

27. $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2 + x}}$

28. $g(x) = \sqrt{\frac{x}{4 + x}}$

29. $f(x) = \frac{1 - x}{\sqrt{1 + x^2}}$

30. $h(x) = \frac{1}{(1 - x)^2}$

31. $y = 1 - \frac{1}{x - 1}$

32. $y = \frac{1 - x^2}{x^2}$

33. $y = \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 2}$

34. $y = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

35. $y = \frac{|x|}{|x| + 1}$

36. $y = \frac{|x|}{x^2 + 1}$

37. $y = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$

38. $y = \frac{1}{|x| + 1}$

39. $y = \frac{x^3}{x^3 + 1}$

40. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

Del 41 al 50, encuentre la asíntota oblicua de la curva dada (Justifique su respuesta.)

41. $y = \frac{x^2 - x}{x}$

42. $y = \frac{x^3 - 3}{x^2}$

43. $y = \frac{6x^2 - 17x}{3x - 4}$

44. $y = \frac{x^3 + x}{x^2}$

45. $y = x + \frac{1}{x}$

46. $y = \frac{x}{3} - \frac{2}{x^2}$

47. $y = \frac{4}{x^3} - \frac{x}{2}$

48. $y = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

49. $y = \frac{x^{3/2} + 1}{x^{1/2}}$

50. $y = \frac{x^{4/3} + 2x^{2/3} - 1}{2x^{1/3}}$

Del 51 al 55, usando la definición de límite al infinito con $\varepsilon - N$, demuestre cada límite.

51. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$

52. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

53. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$

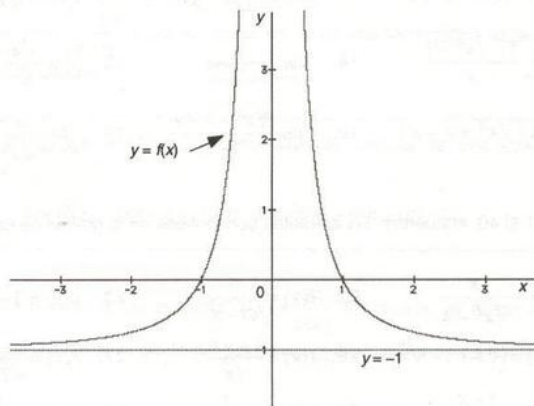
54. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

55. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 0$

4.5 Límites infinitos

Considérese la gráfica de la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$

x	$f(x)$
± 2	$-\frac{3}{4}$
± 1	0
$\pm \frac{1}{2}$	3
$\pm \frac{1}{10}$	99
$\pm \frac{1}{100}$	9999
$\pm \frac{1}{1000}$	999999
$\pm \frac{1}{10000}$	99999999



En la tabla y en la gráfica de la función f se observa que cuando x se aproxima o tiende a cero por la izquierda o por la derecha de cero, los valores $f(x)$ crecen ilimitadamente. Esto se expresa así

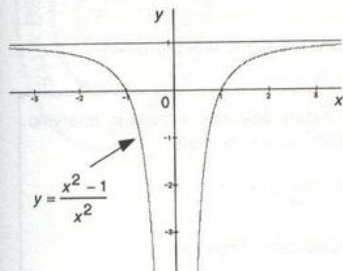
$$f(x) \rightarrow +\infty \text{ o bien así } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

Este es un límite infinito y se lee

"límite de $f(x)$ cuando x tiende a cero, es más infinito"

Recuérdese que $+\infty$ ($-\infty$) no es un número, sólo es un símbolo que se usa en los límites para indicar crecimiento (decrecimiento) ilimitado de alguna de las variables. Así, para la variable $y = f(x)$ se tiene:

Notación:	Se lee:	Significa:
$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x)$ tiende a más infinito	$f(x)$ crece ilimitadamente
$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x)$ tiende a menos infinito	$f(x)$ decrece ilimitadamente



En la gráfica adjunta se observa que

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2} \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow 0$$

O sea

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^2} = -\infty$$

Los límites infinitos se definen así

Definición 1

Supóngase que f es una función definida en algunos intervalos $]c, a[$ y $]a, d[$; entonces

1. *Intuitivamente:*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

si cada vez que x se aproxima por la izquierda o por la derecha al número a con valores distintos de a , $f(x)$ crece ilimitadamente

2. *Formalmente:*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

si para cada número $N > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > N \text{ si } 0 < |x - a| < \delta$$

Definición 2

Supóngase que f es una función definida en algunos intervalos $]c, a[$ y $]a, d[$; entonces

1. *Intuitivamente:*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

si cada vez que x se aproxima por la izquierda o por la derecha al número a con valores distintos de a , $f(x)$ decrece ilimitadamente

2. *Formalmente:*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

si para cada número $N < 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$f(x) < N \text{ si } 0 < |x - a| < \delta$$

Los límites infinitos se calculan usando los siguientes teoremas.

Teorema 1

$$\frac{k}{0} = \pm\infty, k \neq 0$$

Supóngase que las funciones f y g están definidas en algún intervalo abierto que contienen a a (excepto quizá en $x = a$) y que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

en donde k es una constante distinta de cero. Entonces:

$$1. k > 0 \text{ y } g(x) \rightarrow 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

$$2. k > 0 \text{ y } g(x) \rightarrow 0^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

$$3. k < 0 \text{ y } g(x) \rightarrow 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

$$4. k < 0 \text{ y } g(x) \rightarrow 0^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

Nota: El punto a puede ser $+\infty$ o $-\infty$

Demostración

Se demostrará sólo la parte 3, las otras se demuestran en forma similar.

3. Considérese un número $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k < 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^+$ entonces existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$|f(x) - k| < \frac{k}{2} \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_1$$

$$|g(x)| < \varepsilon \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_2$$

De donde:

$$\bullet \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow \frac{k}{2} < f(x) - k < -\frac{k}{2} \Rightarrow \frac{3k}{2} < f(x) < \frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3k}{2} > -f(x) > -\frac{k}{2} > 0$$

$$0 < -\frac{k}{2} < -f(x) < -\frac{3k}{2} \quad (*)$$

$$\bullet \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow 0 < g(x) = |g(x)| < \varepsilon \text{ o sea } 0 < g(x) < \varepsilon \quad (**)$$



De las desigualdades (*) y (**) se sigue que para cualquier $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow -\frac{k}{2} \cdot g(x) < -f(x) \cdot \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{-k}{2} < \frac{-f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{k}{\varepsilon}$$

Así que; para cada $N < 0$, tomando $\varepsilon = \frac{k}{2N}$ existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} < \frac{\frac{k}{2}}{\frac{k}{2N}} = N \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

□

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x-2)^2}$

Solución

$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2 > 0$ y $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 = 0$. Además $(x-2)^2 \rightarrow 0^+$ cuando $x \rightarrow 2$
Entonces por la parte 1 del teorema 1

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x-2)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Límites laterales infinitos

El teorema 1 también es válido si " $x \rightarrow a$ " se sustituye por " $x \rightarrow a^+$ " o por " $x \rightarrow a^-$ "

Ejemplo 2

Calcular

a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 6}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 6}$

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + 1) = 10 > 0$ y $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - x - 6) = 0$. Además:

$$x \rightarrow 3^- \Rightarrow x \rightarrow 3 \text{ con } -2 < x < 3 \Rightarrow x - 3 < 0 \text{ y } x + 2 > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) \rightarrow 0^-$$

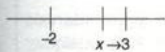
$$(-)(+) = -$$

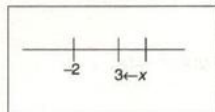
Así que, por la parte 2 del teorema 1, $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 6} = \frac{10}{0^-} = -\infty$

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-3=0 \text{ o } x+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ o } x=-2$$





$$b) \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 + 1) = 10 > 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - x - 6) = 0. \text{ Además:}$$

$$x \rightarrow 3^+ \Rightarrow x \rightarrow 3 \text{ con } -2 < 3 < x \Rightarrow x - 3 > 0 \text{ y } x + 2 > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) \rightarrow 0^+$$

$$\text{Así que, por la parte 1 del teorema 1, } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 6} = \frac{10}{0^+} = +\infty$$

Nota

Como $x \rightarrow 3$ significa que x se aproxima a 3 con valores distintos de 3 por la izquierda o por la derecha de 3, entonces por el teorema 1

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 + 1|}{|x^2 - x - 6|} = \frac{10}{0^+} = +\infty$$

Pero no existe expresión alguna; para $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 6}$, porque:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 6} = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 6} = +\infty$$

Límites infinitos al infinito

Ejemplo 3

$$\text{Calcular } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x^2}{x - 1}$$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x^2} - 1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}. \text{ Pero:}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 0 - 1 = -1 \\ \bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Además: } x \rightarrow +\infty \Rightarrow 1 < x \Rightarrow 0 < x - 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x - 1}{x^2} \rightarrow 0^+$$

$$\text{Entonces, por el teorema 1 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x^2}{x - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

También existen propiedades para límites infinitos de la suma y del producto de funciones. Dichas propiedades se enuncian enseguida.

Teorema 2

$$\pm\infty + k = \pm\infty$$

Supóngase que dos funciones f y g están definidas en algún intervalo abierto que contiene a a (excepto quizá en $x = a$) y que k es cualquier constante

1. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = k$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

2. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = k$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty$$

Demostración

Se demostrará aquí únicamente la parte 1 del teorema. La parte 2 se demuestra en forma análoga.

1. Para cualquier $M > 0$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$f(x) > M \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ y } |g(x) - k| < 1 \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_2$$

De donde:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > M \quad (*)$$

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow -1 < g(x) - k < 1 \Rightarrow k - 1 < g(x) < k + 1 \quad (**)$$

De las desigualdades (*) y (**) se sigue que, para cualquier $M > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow f(x) + g(x) > M + k - 1$$

Así que; para cada $N > 0$, tomando $M > N + 1 - k$ y $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces

$$f(x) + g(x) > M + (k - 1) > (N + 1 - k) + (k - 1) = N$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$ □

Teorema 3

$$(+\infty)(k) = +\infty, k > 0$$

$$(+\infty)(k) = -\infty, k < 0$$

Supóngase que dos funciones f y g están definidas en algún intervalo abierto que contiene a a (excepto quizá en $x = a$) y que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = k$$

en donde k es una constante distinta de cero. Entonces:

$$1. k > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$$

$$2. k < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$$

Demostración

Se demostrará únicamente la parte 1. La parte 2 se demuestra en forma similar.

1. Para cualquier $M > 0$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$f(x) > M \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ y } |g(x) - k| < \frac{k}{2} \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_2$$

De donde:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > M \quad (*)$$

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow -\frac{k}{2} < g(x) - k < \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{k}{2} < g(x) < \frac{3k}{2} \quad (**)$$

De las desigualdades (*) y (**) se sigue que, para cualquier $M > 0$ existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow f(x) \cdot g(x) > \frac{Mk}{2}$$

Así que, para cada $N > 0$, tomando $M > \frac{N}{\frac{k}{2}} = \frac{2N}{k}$ y $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se

tiene que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces

$$f(x) \cdot g(x) > \frac{Mk}{2} = \frac{2N}{k} \cdot \frac{k}{2} = N$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$ □

Teorema 4

$$(-\infty)(k) = -\infty, \quad k > 0$$

$$(-\infty)(k) = +\infty, \quad k < 0$$

Supóngase que dos funciones f y g están definidas en algún intervalo abierto que contiene a a (excepto quizá en $x = a$) y que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = k$$

en donde k es una constante distinta de cero. Entonces:

$$1. \quad k > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$$

$$2. \quad k < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$$

Demostración

Se demuestra como el teorema 3. □

Teorema 5

$$\frac{k}{\pm\infty} = 0$$

Supóngase que dos funciones f y g están definidas en algún intervalo abierto que contiene a a (excepto quizá en $x = a$) y que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

en donde k es una constante. Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Demostración

Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$, para cada $\varepsilon_1 > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - k| \leq |f(x) - k| < \varepsilon_1 \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_1$$

De donde: $|f(x)| < \varepsilon_1 + |k|$ si $0 < |x - a| < \delta_1$

Supóngase que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, entonces para cada $M > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$g(x) > M \text{ si } 0 < |x - a| < \delta_2$$

O sea, para cada $M > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\frac{1}{g(x)} < \frac{1}{M} \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_2$$

Por lo que, si $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta_2$ entonces

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = |f(x)| \cdot \frac{1}{|g(x)|} = |f(x)| \cdot \frac{1}{g(x)} < \frac{\varepsilon_1 + |k|}{M}$$

Así que, para cada $\varepsilon > 0$; tomando $\varepsilon_1 = 1$, $M = \frac{\varepsilon_1 + |k|}{\varepsilon}$ y $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se cumple que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = |f(x)| \cdot \frac{1}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon_1 + |k|}{M} = \frac{\varepsilon}{1} = \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

Por lo que, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$, el razonamiento es similar. $\square$

Corolario 1

$$(+\infty)^p = +\infty, \quad p > 0$$

Supóngase que una función f está definida en algún intervalo abierto que contiene a a (excepto quizá en $x = a$) y que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^p = +\infty \text{ para todo } p > 0$$

Demostración

Por el teorema 5 se tiene que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$. O sea $x \rightarrow a \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$

Considérese $z = \frac{1}{f(x)}$, entonces por el teorema 1

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^p = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{1}{(f(x))^p}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)^p} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^p} = +\infty \quad \square$$

Teorema 6

Si f y g son funciones tales que $f(g(x))$ está definido para todo x en un intervalo abierto que contiene a a (excepto quizá en $x = a$), entonces

$$1. \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u)$$

Nota: El punto a puede ser $+\infty$ o $-\infty$

Demostración

1. Para el $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u)$ hay tres posibilidades

$$\bullet \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = L \text{ con } L \text{ en } \mathbb{R}$$

$$\bullet \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = -\infty$$

Hay también tres posibilidades para el punto a

$$\bullet a \text{ en } \mathbb{R}$$

$$\bullet a = +\infty$$

$$\bullet a = -\infty$$

Se demostrará el caso en que $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = -\infty$ y $a = -\infty$. O sea, se demostrará que si $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ y $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = -\infty$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(g(x)) = -\infty$$

Para ello considérese $N < 0$. Como $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = -\infty$, existe $M > 0$ tal que

$f(u) < N$ si $u > My$ $u \in \mathcal{D}_f$. Y como $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$, existe $K < 0$ tal que $g(x) > M$ si $x < K$ y $x \in \mathcal{D}_g$. Entonces, existe $K < 0$ tal que $f(g(x)) < N$ si $x < K$ y $x \in \mathcal{D}_{f \circ g}$. Por lo que, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(g(x)) = -\infty$. O sea,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u)$$

Los casos restantes de esta primera parte se demuestran en forma análoga.

2. La parte 2, se demuestra en forma similar a la demostración de la primera parte del teorema. $\square$

Ejemplo 4

Calcular el $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

Método 1

Usando el teorema 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Método 2

Usando el teorema 3:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1) \cdot \left(\frac{1}{x^2} \right) = (-1)(+\infty) = -\infty$$

Ejemplo 5

Calcular el $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{(x-1)(x+3)^{-1}}$

Método 1

Usando el teorema 2:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 2 \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x+3)^{-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3) = -\infty + 3 = -\infty$$

Entonces por el teorema 4:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{(x-1)(x+3)^{-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-1}{x-1} \right) \left(\frac{1}{(x+3)^{-1}} \right) = (2)(-\infty) = -\infty$$

Método 2

Usando el teorema 1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{(x-1)(x+3)^{-1}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+5x-3}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}}{\frac{x-1}{x^2}} = \frac{2}{0^-} = -\infty.\end{aligned}$$

Asíntotas verticales

Definición

La recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de una curva $y = f(x)$ si al menos uno de los siguientes límites es verdadero.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

Ejemplo 6

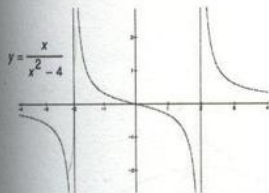
Encontrar las asíntotas verticales de la función $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

Se iguala a cero el denominador para analizar las posibles asíntotas.

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ o } x = -2$$

Las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales de $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ porque:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{2}{0^+} = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$



Ejercicios 4.5

En los ejercicios del 1 al 20, calcule el límite.

1. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x}{x^2-4} \right)$

2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{8}{x^2} \right)$

4. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^3+1}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x}}{x}$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2x-3x^2}{x+1}$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-x^2)$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x^2}{x-1} \right)$

9. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^4-1}$

10. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}-x)$

12. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

13. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3+x^2-1}{x-1}$

14. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-1)^3}{2x-4}$

15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1}$

16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-x} \right)$

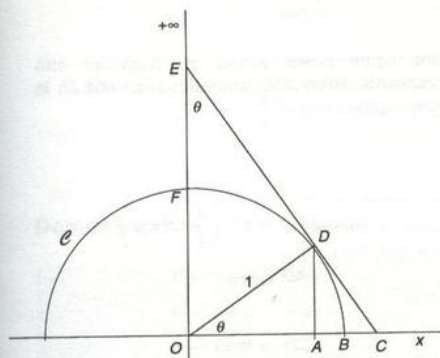
17. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{(x-2)^2}$

18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x+1}$

19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-3)$

20. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2+1)$

(Nota: Dos letras mayúsculas juntas sin raya encima, denotan la longitud del segmento a cuyos extremos corresponden dichas letras. Por ejemplo AD denota la longitud del segmento $\overline{AD}$)



Cuando θ se aproxima a cero con valores en el intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, los puntos D y C se aproximan al punto B como se muestra en la figura adjunta, de ello se deducen los siguientes límites.

Cuando $\theta \rightarrow 0^+$:

$$AD = \text{sen } \theta \rightarrow 0$$

$$OA = \text{cos } \theta \rightarrow 1$$

$$CD = \text{tan } \theta \rightarrow 0$$

$$DE = \text{cot } \theta \rightarrow +\infty$$

$$OC = \text{sec } \theta \rightarrow 1$$

$$OE = \text{csc } \theta \rightarrow +\infty$$

O sea:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \text{sen } \theta = 0$$

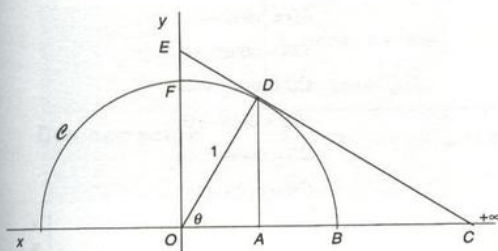
$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \text{cos } \theta = 1$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \text{tan } \theta = 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \text{cot } \theta = +\infty$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \text{sec } \theta = 1$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \text{csc } \theta = +\infty$$



En forma análoga, cuando θ se aproxima a $\frac{\pi}{2}$ con valores en el intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, los puntos D y E se aproximan al punto F como se muestra en la figura adjunta

Cuando $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$:

$$AD = \text{sen } \theta \rightarrow 1$$

$$OA = \text{cos } \theta \rightarrow 0$$

$$CD = \text{tan } \theta \rightarrow +\infty$$

$$DE = \text{cot } \theta \rightarrow 0$$

$$OC = \text{sec } \theta \rightarrow +\infty$$

$$OE = \text{csc } \theta \rightarrow 1$$

O sea:

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \text{sen } \theta = 1$$

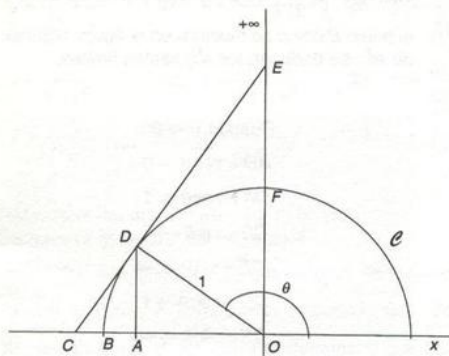
$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \text{tan } \theta = +\infty$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \text{sec } \theta = +\infty$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos \theta = 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cot \theta = 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \csc \theta = 1$$



Una figura similar auxilia en cualquier otro cuadrante. Analice lo bondadoso de ello en lo que sigue.

Cuando $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \right)$:

$$AD = \operatorname{sen} \theta \rightarrow 0$$

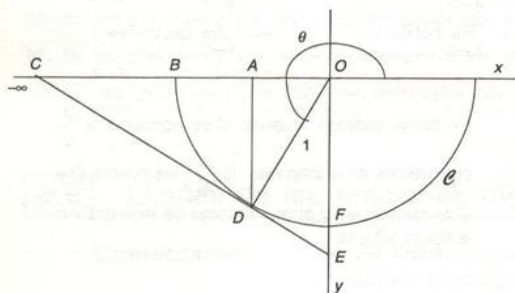
$$OA = \cos \theta \rightarrow -1$$

$$CD = \tan \theta \rightarrow 0$$

$$DE = \cot \theta \rightarrow +\infty$$

$$OC = \sec \theta \rightarrow -1$$

$$OE = \csc \theta \rightarrow +\infty$$



Cuando $\theta \rightarrow \frac{3\pi}{2}^- \left(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$:

$$AD = \operatorname{sen} \theta \rightarrow -1$$

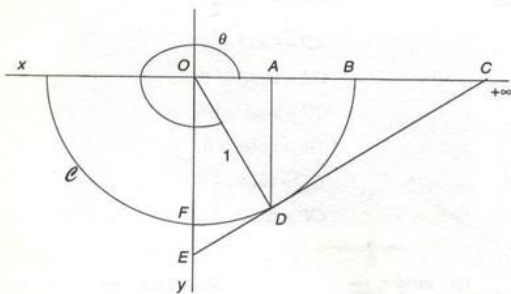
$$OA = \cos \theta \rightarrow 0$$

$$CD = \tan \theta \rightarrow -\infty$$

$$DE = \cot \theta \rightarrow 0$$

$$OC = \sec \theta \rightarrow -\infty$$

$$OE = \csc \theta \rightarrow -1$$



Cuando $\theta \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+ \left(\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \right)$:

$$AD = \operatorname{sen} \theta \rightarrow -1$$

$$OA = \cos \theta \rightarrow 0$$

$$CD = \tan \theta \rightarrow +\infty$$

$$DE = \cot \theta \rightarrow 0$$

$$OC = \sec \theta \rightarrow +\infty$$

$$OE = \csc \theta \rightarrow -1$$

Enseguida se demostrarán formalmente algunos límites como $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta$,

$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$ y $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta}$, para lo cual se establecerán dos lemas.

Lema 1

El área A del sector circular determinado en un círculo de radio r por un ángulo central de medida θ radianes, es

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

Demostración

El área de un círculo de radio r es πr^2 . Supóngase que la medida en grados del ángulo central es x° . Entonces se tiene la siguiente proporción

$$\frac{\pi r^2}{360^\circ} = \frac{A}{x^\circ}$$

De donde, $A = \left(\frac{\pi r^2}{360^\circ} \right) (x^\circ) = \frac{\pi r^2}{360} x$. Pero por el teorema 1 de la sección

3.5, $x = \frac{180}{\pi} \theta$. Entonces:

$$A = \frac{\pi r^2}{360} x = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \frac{180}{\pi} \theta = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

□

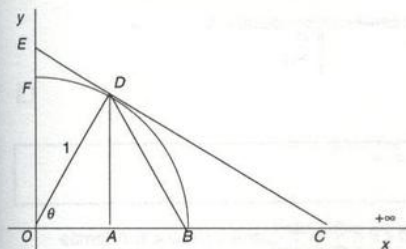
Lema 2

Supóngase que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, entonces:

1. $\sin \theta < \theta < \tan \theta$
2. $1 - \sin \theta < \cos \theta$

Demostración

1. Considérese la figura adjunta. En ella:



$A_1 = \text{área del } \triangle OBD$

$A_2 = \text{área del sector circular } OBD \text{ determinado por el ángulo central de medida } \theta \text{ radianes con } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$A_3 = \text{área del } \triangle ODC$

Entonces, $A_1 < A_2 < A_3$. Pero:

$$A_1 = \frac{OB \cdot AD}{2} = \frac{(1)(\sin \theta)}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$A_2 = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} (1)^2 \theta = \frac{1}{2} \theta$$

$$A_3 = \frac{OC \cdot AD}{2} = \frac{(\sec \theta)(\sin \theta)}{2} = \frac{\left(\frac{1}{\cos \theta}\right)(\sin \theta)}{2} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{2} = \frac{1}{2} \tan \theta$$

Por lo que, $\frac{1}{2} \sin \theta < \frac{1}{2} \theta < \frac{1}{2} \tan \theta$. De donde:

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta \text{ siempre que } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

2. Considérese la misma figura. Por el teorema de la desigualdad del triángulo (sección 2.3):

$$OD \leq OA + AD$$

Pero $OD = 1$, $OA = \cos \theta$ y $AD = \sin \theta$ con $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, entonces

$$1 < \cos \theta + \sin \theta$$

De donde, $1 - \sin \theta < \cos \theta$. □

Teorema 1

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0$$

Demostración

Por el lema 2, $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin \theta < \theta$. Además

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} 0 = 0 \text{ y } \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta = 0$$

Entonces por el teorema del emparedado (sección 4.3)

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \sin \theta = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}}} \sin \theta = 0$$

Análogamente:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0 \Rightarrow 0 < -\theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin(-\theta) < -\theta$$

$$\Rightarrow 0 < -\sin \theta < -\theta \Rightarrow \theta < \sin \theta < 0$$

Entonces, otra vez por el teorema del emparedado se sigue que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \sin \theta = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ -\frac{\pi}{2} < \theta < 0}} \sin \theta = 0$$

Por lo que, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0$. □

Teorema 2

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$$

Demostración

Por el lema 2 se tiene que $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 - \sin \theta < \cos \theta < 1$. Además

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} 1 = 1 \text{ y } \lim_{\theta \rightarrow 0} (1 - \sin \theta) = 1$$

Entonces por el teorema del emparedado

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos \theta = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}}} \cos \theta = 1$$

Análogamente:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0 \Rightarrow 0 < -\theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 - \sin(-\theta) < \cos(-\theta) < 1 \\ \Rightarrow 1 + \sin \theta < \cos \theta < 1$$

De donde por el teorema del emparedado

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \cos \theta = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ -\frac{\pi}{2} < \theta < 0}} \cos \theta = 1$$

Por lo que, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$ □

Teorema 3

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

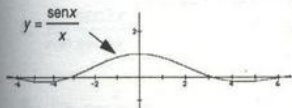
Demostración

Por el lema 2, $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \theta < \theta < \tan \theta$. Pero:

$$\sin \theta < \theta \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\theta} < 1 \text{ y } \theta < \tan \theta \Rightarrow \cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta}$$

Así que, $\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$. De donde, por el teorema del emparedado se sigue que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}}} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$



Análogamente:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0 \Rightarrow 0 < -\theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(-\theta) < \frac{\sin(-\theta)}{-\theta} < 1 \Rightarrow \cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$$

De esto, por el teorema del emparedado se sigue que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{\substack{\theta \rightarrow 0 \\ -\frac{\pi}{2} < \theta < 0}} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

Por lo que, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ □

Este límite se aplica en el cálculo de casi todos los límites de funciones trigonométricas como se muestra en los ejemplos que siguen.

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta}$

Solución

$$\begin{aligned}
 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\theta(1 + \cos \theta)} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta}{\theta(1 + \cos \theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \theta}{(1 + \cos \theta)} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{(1 + \cos \theta)} = (1) \left(\frac{0}{2} \right) = (1)(0) = 0
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} \cdot \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \theta}{\theta}}{\frac{\sin h}{h}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

(Nota: $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \theta = 2x \rightarrow 0$ y $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow h = 3x \rightarrow 0$.)

Ejemplo 3

Calcular $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{3y}{\sin 2y}$

Solución

$$\begin{aligned}
 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3y}{\sin 2y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3}{\frac{\sin 2y}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sin 2y}{2y}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sin \theta}{\theta}} \\
 &= \frac{\frac{3}{2}}{\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}} = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

(Nota: $y \rightarrow 0 \Leftrightarrow \theta = 2y \rightarrow 0$.)

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Ejemplo 5

Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x \cos \frac{1}{x} \right)$

Solución

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x \cos \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0
 \end{aligned}$$

($x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{x} \rightarrow 0$)

Ejemplo 6

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

Solución

Tomando en cuenta la gráfica de la función $y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, se intuye que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

Ello se demostrará enseguida usando la definición formal de límite con $\varepsilon - \delta$. En este caso:

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot (1) = |x|$$

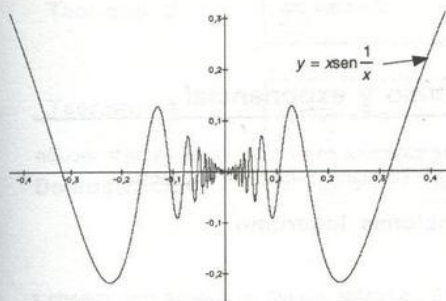
De esto último, para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon \text{ si } |x| < \varepsilon$$

Entonces tomando $\delta = \varepsilon$ se cumple que

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon \text{ si } |x| < \delta$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.



Ejercicios 4.6

En los ejercicios del 1 al 46, calcule el límite.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} 2x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 6x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x}$

7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1 - \cos x}$

10. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan^2 \theta}{\theta}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x}$

12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$

16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \operatorname{sen} x$

17. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cos x$

18. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x}$

19. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cos x$

20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

22. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x}$

23. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \cos x}{x^2}$

24. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \cos x}{x}$

25. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos 2x}{x}$

26. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x}$

28. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

29. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos t}{t^3}$

30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

31. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$

32. $\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2}$

33. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos 2x}$

34. $\lim_{\theta \rightarrow 1} (1 - \theta) \tan \frac{\pi \theta}{2}$

35. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$

36. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$

37. $\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} z}{z - \frac{\pi}{2}}$

38. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x}{\pi - x}$

39. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi - x}{\operatorname{sen} x}$

40. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

41. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \right)$

42. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

43. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x}$

44. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

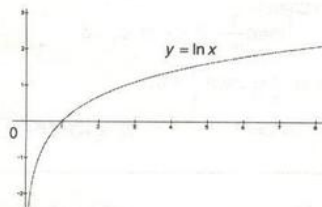
45. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - \cos x}{\sin x}$

46. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

4.7 Límites de las funciones logaritmo y exponencial

Algunos de estos límites se tratarán aquí en forma intuitiva y en la sección 6.7 de este libro se dará más información acerca de este tema.

Límites de las funciones logaritmo



En la gráfica adjunta se observa que, cuando x se aproxima a cero con valores positivos, los valores de la función $y = \ln x$ decrecen ilimitadamente. O sea:

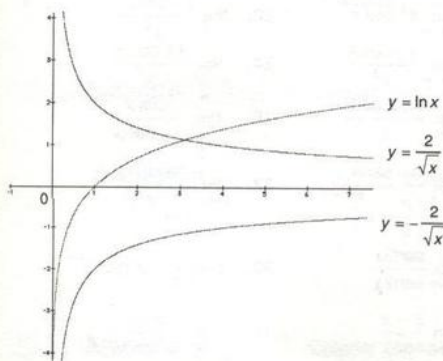
Teorema 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

También se observa que

Teorema 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$



Nota: En lo sucesivo en el cálculo de un límite que involucra a una función logaritmo cuando $x \rightarrow 0$, se entenderá que $x \rightarrow 0^+$ porque las funciones logaritmo no están definidas en $x < 0$.

En la figura adjunta, se observa que si $0 < x < 1$, entonces

$$-\frac{2}{\sqrt{x}} < \ln x < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

De donde:

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 &\Rightarrow -\frac{2x}{\sqrt{x}} < x \ln x < \frac{2x}{\sqrt{x}} \\ &\Rightarrow -2\sqrt{x} < x \ln x < 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

Entonces por el teorema del emparedado se concluye lo que sigue:

Teorema 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

Teorema 4

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

Demostración

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}}. \text{ Por el teorema 5 (sección 4.5), } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0^+$$

Entonces por ese mismo teorema, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$. Por lo que, por el teorema 1 de la sección 4.5, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Así que, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$

$$2. y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}. \text{ Entonces}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{y}}{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} y \ln y^{-1} = \lim_{y \rightarrow 0} (-1)(y \ln y) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} (-1) \cdot \lim_{y \rightarrow 0} (y \ln y) \\ &= (-1)(0) \quad (\text{teorema 3 de esta sección}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$3. y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}. \text{ Entonces } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-1)(y \ln y). \text{ Pero por la parte 1 de este teorema, } \lim_{y \rightarrow +\infty} y \ln y = +\infty. \text{ Entonces por el teorema}$$

$$3 \text{ de la sección 4.5 se concluye que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \quad \square$$

Corolario 1

Si $a > 0$, entonces:

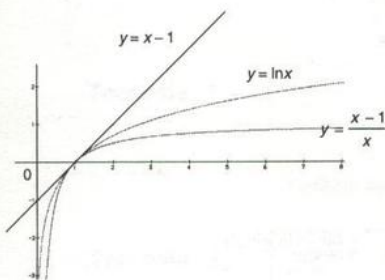
$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0$$

Demostración

1. Por el corolario 1 de la sección 4.5, $x \rightarrow +\infty \Rightarrow x^a \rightarrow +\infty$. Entonces, si $z = x^a$ se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \cdot \frac{\ln x^a}{x^a} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \cdot \frac{\ln z}{z} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \cdot \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\ln z}{z} \\ &= \frac{1}{a} \cdot 0 = 0 \quad (\text{teorema 4 de esta sección})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-a}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-a x^{-a-1}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{a} \right) \left(\frac{\ln y}{y} \right) \\ &\quad \left(y = x^{-a} = \frac{1}{x^a} \rightarrow +\infty \text{ cuando } x \rightarrow 0^+ \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{a} \right) \cdot \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = \left(-\frac{1}{a} \right) (0) = 0 \quad (\text{teorema 4}) \quad \square\end{aligned}$$



En la figura adjunta se observa que

$$\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$$

para todo x . De donde

$$0 < x < 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad 1 < x < 2 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{\ln x}{x-1} \leq 1$$

Entonces por el teorema del emparejado (sección 4.3) se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Por lo que, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$. Y si $h = x - 1$, entonces.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$$

Por lo tanto se concluye lo que sigue:

Teorema 5

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \quad \text{o bien} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{1/h} = 1$$

Ejemplo 1

Calcular

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \ln \frac{1}{x} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \ln \frac{1}{x} \right)$

Solución

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (x + \ln x^{-1}) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - \ln x)$$

Pero por el teorema 4 (sección 4.5),

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1)(\ln x) = +\infty$$

Además, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Entonces, por el teorema 2 (sección 4.5) se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (x + (-\ln x)) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)$$

Pero por el teorema 4 de esta sección,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 1 - 0 = 1$$

Además, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$. Entonces por el teorema 3 (sección 4.5) se

tiene que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \ln \frac{1}{x} \right) = +\infty$

Ejemplo 2

Calcular el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^2}$

Solución

Como $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$. Entonces por el teorema 5 (sección

4.5) se tiene que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln x} = 0^-$. Por lo que, por el teorema 1 (sección 4.5)

se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{x^2}{\ln x}} = -\infty$$

Ejemplo 3

Calcular el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 3x - 1}{2 - \ln 3x}$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 3x - 1}{2 - \ln 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 3x}{\ln 3x} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\ln 3x}}{\frac{2}{\ln 3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\ln 3x}}{\frac{2}{\ln 3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\ln 3x}}{\frac{2}{\ln 3x} - 1} = -1$$

Ejemplo 4

Calcular el $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 + \ln^3 x)^{1/3}}{x^2}$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 + \ln^3 x)^{1/3}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[\ln^3 x \left(\frac{2}{\ln^3 x} + 1 \right) \right]^{1/3}}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{2}{\ln^3 x} + 1 \right)^{1/3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\ln^3 x} + 1 \right)^{1/3} = 0 \cdot 0 \cdot 1 = 0
 \end{aligned}$$

Ejemplo 5Calcular el $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^x$ **Solución**

Por el teorema 4 de esta sección, se tiene que

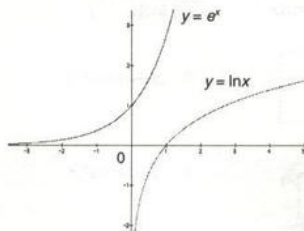
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$$

Ejemplo 6Calcular el $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2(x-1) - \log_2 x)$ **Solución**Si $h = 1 - \frac{1}{x}$, entonces $x = \frac{1}{1-h}$. Por lo que, $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow h \rightarrow 1$. Así que

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_2(x-1) - \log_2 x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \frac{x-1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 1} \log_2 h = 0
 \end{aligned}$$

Ejemplo 7Calcular el $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{(\log_{10} x)^2 - 1}$ **Solución**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{(\log_{10} x)^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log_{10} x \sqrt{1 - \frac{1}{(\log_{10} x)^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{\ln 10} \sqrt{1 - \left(\frac{\ln 10}{\ln x} \right)^2} \quad (\text{Corolario 1 secc. 3.7}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln 10} \sqrt{1 - \left(\frac{\ln 10}{\ln x} \right)^2} \right) (x \ln x) \quad (\text{Ejemplo 5 y teorema 3 secc. 4.5}) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

Límites de las funciones exponenciales

El estudio de los límites que involucran a la función exponencial $y = e^x$ se basa en la equivalencia

$$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$$

Teorema 6

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad 3. \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

Demostración

Como $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$, entonces por los teoremas 1 y 2 de esta sección, se tiene que

$$x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \ln y \rightarrow -\infty \Leftrightarrow y \rightarrow 0 \quad y \quad x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \ln y \rightarrow +\infty \Leftrightarrow y \rightarrow +\infty$$

Así que:

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= \lim_{y \rightarrow 0} y = 0 \\ 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} y = +\infty \\ 3. \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x &= \lim_{y \rightarrow 0} (\ln y)(y) = 0 \quad (\text{teorema 3 sección 4.7}) \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 7

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \quad 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$$

Demostración

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(-x)e^{-x}} = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{-1}{ze^z} \quad (z = -x)$$

Como $z < 0$ y $e^z > 0 \Rightarrow ze^z < 0$; entonces por el teorema 6, $ze^z \rightarrow 0^-$

De donde; por el teorema 1 de la sección 4.5, $\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{-1}{ze^z} = +\infty$. Por lo

que, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

$$2. \text{ Como } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \text{ entonces por el teorema 5 de la sección 4.5, se tiene que } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^{-x}} = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{-1}{e^z} \quad (z = -x)$$

Como $z < 0$ y $e^z > 0$, entonces por la parte 2, $\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{e^z}{z} = 0^-$. Por lo que;

por el teorema 1 de la sección 4.5, se tiene $\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{-1}{e^z} = +\infty$. De

donde, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$ □

Corolario 2

Si $a > 0$, entonces:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty \quad 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^a} = 0$$

Demostración

Nótese que

$$\frac{e^x}{x^a} = \left(\frac{e^{x/a}}{x} \right)^a = \frac{1}{a^a} \left(\frac{e^{x/a}}{x/a} \right)^a = \frac{1}{a^a} \left(\frac{e^z}{z} \right)^a$$

en donde $z = \frac{x}{a}$. Así que:

1. Del teorema 7 anterior y el corolario 1 y el teorema 3 de la sección 4.5, se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a^a} \right) \left(\frac{e^z}{z} \right)^a = +\infty$$

2. Por el teorema 7 se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^a} = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{1}{a^a} \left(\frac{e^z}{z} \right)^a = \frac{1}{a^a} \left(\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{e^z}{z} \right)^a = \left(\frac{1}{a^a} \right) (0)^a = 0 \quad \square$$

Ejemplo 8Calcular el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ **Solución**Supóngase que $y = e^x$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y - 1}{\ln y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\ln(h+1)} \quad (h = y - 1)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(h+1)}{h}} = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} 1}{\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}} = \frac{1}{1} = 1 \quad (\text{teorema 5})$$

Ejemplo 9Calcular el $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - e^{-x})$ **Solución**Supóngase que $y = e^x$. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - e^{-x}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(y - \frac{1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^2 - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Ejemplo 10Calcular el $\lim_{x \rightarrow +\infty} x 2^x$ **Solución**

$y = 2^x \Leftrightarrow x = \log_2 y = \frac{\ln y}{\ln 2}$ (corolario 1 secc. 3.7). Entonces $y \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$. Por lo que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x 2^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln y}{\ln 2} \right) (y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln 2} (y \ln y)$$

Pero $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} > 0$ y $\lim_{y \rightarrow +\infty} (y \ln y) = +\infty$ (teorema 4). Entonces por el

teorema 3 de la sección 4.5, se sigue que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x2^x = +\infty$

Ejemplo 11

Calcular el $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{2^x}$

Solución

$$y = \frac{e^x}{2^x} = \left(\frac{e}{2}\right)^x \Leftrightarrow x = \log_{\frac{e}{2}} y = \frac{\ln y}{\ln \frac{e}{2}} = \frac{\ln y}{\ln e - \ln 2} = \frac{\ln y}{1 - \ln 2}$$

Entonces $y \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$. Por lo que, por el teorema 3 de esta sección se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{2^x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\ln y}{1 - \ln 2} \cdot y \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \ln 2} \cdot (y \ln y) \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \ln 2} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} (y \ln y) = \left(\frac{1}{1 - \ln 2} \right) (0) = 0 \end{aligned}$$

Ejercicios 4.7

En los ejercicios del 1 al 45, calcule cada límite.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{2 + 3 \ln x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \frac{1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{1}{x}}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \ln(x+1) - x \ln x]$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} ((x-1) \ln(x^2 - x))$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) \frac{x-1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 3)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1)$
- $\lim_{y \rightarrow 0} \ln(\cos y)^{1/y}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\cos \frac{1}{x})^x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \cos x)^{2/x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 x)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Insec} x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(\cos \frac{1}{x})^x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + a)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{ax}}{x} \quad (a > 0)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1)$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\ln \cos x - \ln \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \sin \frac{x}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 - \cos x)^x$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\sin x)^x$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\sin x)^{1/x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x 2^x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3^x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{5^x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{2^x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{5^x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{x}{3})}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow \theta} \frac{\ln x + 1}{x - \frac{1}{e}}$
- $\lim_{x \rightarrow \theta} \frac{1}{x - \frac{1}{e}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x - 1}{x - e}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^2} - 1}}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{2x} - 1}$

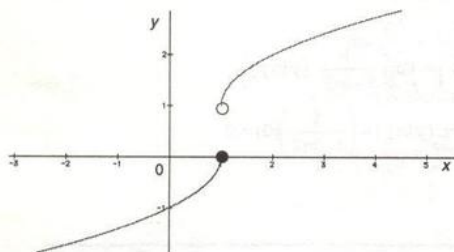
41. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{3^x - 3^2}$

42. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{a}} \frac{2^{ax} - 2}{ax - 1}$

43. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{2x} + 3)}{x}$

44. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{8x} - e^{5x}}{x}$

45. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$

4.8 Continuidad

1

 $f(1) = 0$ existe (porque 0 es real, o sea $0 \in \mathbb{R}$)

2

Los límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -\sqrt{1-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sqrt{x-1}) = 1$$

son distintos. Entonces $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ no existe. Precisando se dice que:**Definición 1**Una función f es *continua* en un punto $x = a$ si satisface las siguientes condiciones

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Si al menos una de estas condiciones no se cumple, la función f es *discontinua* en $x = a$

O brevemente:

Una función f es continua en un número real a , si

Considérese la función

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x} & \text{si } x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x-1} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Esta función es discontinua (no continua) en $x = 1$ porque da un salto en el punto $(1, 0)$.Enseguida se analiza lo que pasa con el valor y el límite de la función f en su discontinuidad en $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

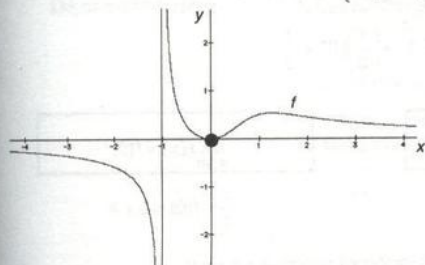
con $f(a)$ número real.

Ejemplo 1

$f(x) = x - \frac{1}{x-2}$ es discontinua en $x = 2$, porque $f(2)$ no existe.

Ejemplo 2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^3+1} & \text{si } x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$



Para esta función:

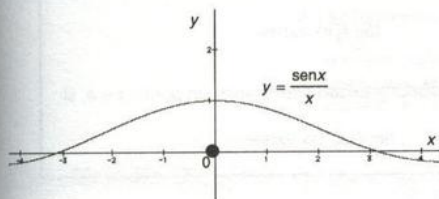
1. $f(-1) = 0$ existe

2. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x^3+1} = +\infty$. Por lo que $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x^3+1}$ no existe.

Así que, esta función f es discontinua en $x = -1$

Ejemplo 3

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



Para esta función:

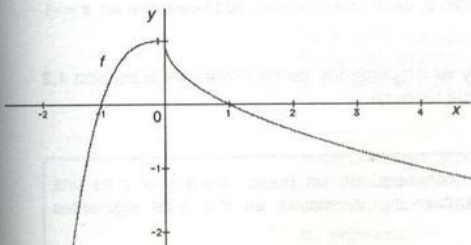
1. $f(0) = 0$ existe.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

3. Pero $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$. Entonces, esta función es discontinua en $x = 0$

Ejemplo 4

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Para esta función:

1. $f(0) = 1$ existe

2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + 1) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \sqrt{x}) = 1$$

Por lo que, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ existe.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$

Entonces, esta función es continua en $x = 0$

Ejemplo 5

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos^2 x}{2x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ x + k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Encontrar el valor de k que hace continua a f en $x = 0$

Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right) (1)^2 = \frac{1}{2}$$

f es continua en $x = 0$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} = f(0) = 0 + k$$

Por lo que, para $k = \frac{1}{2}$ esta función es continua en $x = 0$

Definición 2

1. Una función f tiene una *discontinuidad removible* en un punto $x = a$, si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe}$$

2. Una función f tiene una *discontinuidad esencial* en un punto $x = a$, si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ no existe}$$

Ejemplo 6

a) La función f del ejemplo 3, tiene una discontinuidad removible en $x = 0$. Si esta función f se redefine en $x = 0$ como

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

entonces, la discontinuidad desaparece (o sea, se remueve.)

b) La función f del ejemplo 2, tiene una discontinuidad esencial en $x = -1$

Usando la definición 1 y las propiedades de los límites de la sección 4.2 se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1

Si f y g son funciones continuas en un punto $x = a$ y si c es una constante, entonces también son continuas en $x = a$ las siguientes funciones

- | | | | | |
|------------|------------|---------|----------------|-----------------------------------|
| 1. $f + g$ | 2. $f - g$ | 3. cf | 4. $f \cdot g$ | 5. $\frac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$ |
|------------|------------|---------|----------------|-----------------------------------|

Teorema 2

1. Cada función polinomial es continua en todo número a
2. Cada función racional (cociente de dos funciones polinomiales) es continua en todo número de su dominio

Demostración

1. Las funciones polinomiales son de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

en donde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ son constantes.

Por las propiedades fundamentales de los límites (sección 4.2) se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} a_i = a_i \text{ para todo } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} x^\alpha = a^\alpha \text{ para todo } \alpha = 1, 2, \dots, n$$

Entonces, por el teorema anterior se concluye que un polinomio $f(x)$ es una función continua en todo número $x = a$

2. Las funciones racionales son de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$; en donde, $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, entonces por la parte 1 y el teorema anterior se tiene que una función racional es una función continua en todo número $x = a$ en su dominio.

Ejemplo 7

Calcular el $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Solución

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ es una función racional. Además 3 está en el $\mathcal{D}_f$. Entonces por el teorema 2 y la definición 1:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = f(3) = \frac{3^2 - 4}{3 - 2} = \frac{5}{1} = 5$$

De acuerdo con la definición 1 (secc. 4.3), para que el límite de una función f exista en un punto a , el número a no necesariamente debe pertenecer al dominio de $f(\mathcal{D}_f)$. Ello está implícito en la desigualdad

$$0 < |x - a| \text{ con } x \in \mathcal{D}_f$$

involucrada en dicha definición. Si la función f es continua en $x = a$, tal desigualdad está de más, porque en ese caso el número a está en el $\mathcal{D}_f$ y es obvio que $x = a \Rightarrow |x - a| = |a - a| = |0| = 0 < \delta$. Así que, si a está en el $\mathcal{D}_f$, entonces

f continua en a $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

 $\Leftrightarrow$

Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ si $|x - a| < \delta$ y $x \in \mathcal{D}$

Por esto, la siguiente definición es una alternativa equivalente a la definición 1 para una función continua en un punto.

Definición 3

Una función f es continua en un punto a en $\mathcal{D}_f$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ si } |x - a| < \delta \text{ y } x \in \mathcal{D}$$

Enseguida se usará esta definición y la definición 1 (secc. 4.3) en la demostración del siguiente teorema.

Teorema 3

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ y f es continua en b , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(b)$$

Demostración

Considérese $\varepsilon > 0$. Por ser f continua en b , existe $\eta > 0$ tal que

$$|f(y) - f(b)| < \varepsilon \text{ si } |y - b| < \eta \text{ con } y \text{ en el } \mathcal{D}$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, por la definición 1 (secc. 4.3), existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(x) - b| < \eta \text{ si } 0 < |x - a| < \delta \text{ y } x \text{ en el } \mathcal{D}_g$$

Entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon \text{ si } 0 < |x - a| < \delta \text{ y } x \text{ en el } \mathcal{D}_{f \circ g}$$

Por lo que, por la definición 1 (secc. 4.3): $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$

□

Corolario 1

Si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a

Demostración

g continua en $a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$. Y como f es continua en $g(a)$, entonces por el teorema 3,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(g(a)) = (f \circ g)(a)$$

O sea, $f \circ g$ es continua en a .

□

Corolario 2

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = e$$

Demostración

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = e^{\lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{1/h}} = e^{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h}} \quad (\text{teorema 3})$$

$$= e^1 = e$$

(teorema 5 secc. 4.7) $\square$ **Ejemplo 8**Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$.**Solución**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x^x &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^x)} && (\text{Las funciones } e^x \text{ y } \ln x \text{ son inversas una de la otra}) \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x} && \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x} = e^0 = 1 && (\text{teorema 3 secc. 4.7}) \end{aligned}$$

Definición 41. Una función f es *continua por la derecha* en un punto a , si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

2. Una función f es *continua por la izquierda* en un punto a , si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Ejemplo 9

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

Esta función es continua por la izquierda en $x = 1$, porque

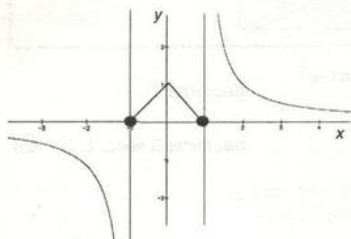
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} = 0 = f(1)$$

También es continua en 2 por la derecha, porque

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2} = 0 = f(2)$$

Definición 51. Una función f es continua en un intervalo abierto, si es continua en todo punto de dicho intervalo2. Una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, si es continua en el intervalo abierto $]a, b[$ y es continua por la derecha en a y por la izquierda en b **Ejemplo 10**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ 1 - |x| & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$



Esta función:

1. Es continua en el intervalo abierto $]-\infty, -1[$, porque para cada $a < -1$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{a+1} = f(a)$$

También es continua en el intervalo abierto $]1, \infty[$; porque, para cada $a > 1$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{a-1} = f(a)$$

2. Es continua en el intervalo cerrado $[-1, 1]$, porque:

- Para cada $-1 < a < 1$ se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (1 - |x|) = 1 - |a| = f(a)$$

O sea, f es continua en el intervalo abierto $]-1, 1[$

- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ -1 < x}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (1 - |x|) = 1 - |-1| = 1 - 1 = 0 = f(-1)$

Es decir, f es continua por la derecha en $x = -1$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - |x|) = 1 - |1| = 1 - 1 = 0 = f(1)$

O sea, f es continua por la izquierda en $x = 1$

3. Es discontinua en $x = -1$, porque:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

También esta función es discontinua en $x = 1$, porque:

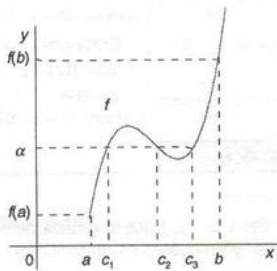
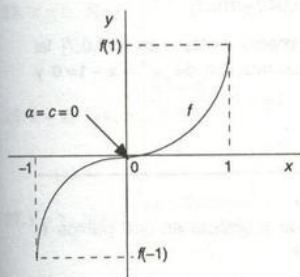
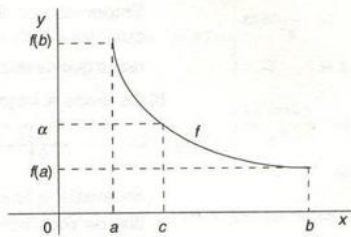
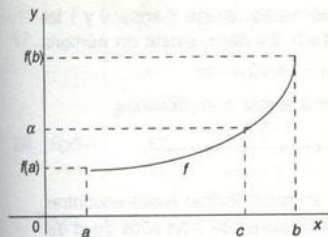
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ 1 < x}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Enseguida se enuncia un teorema que es útil para aproximar raíces de polinomios. Su demostración se omite por no corresponder a los objetivos de este texto.

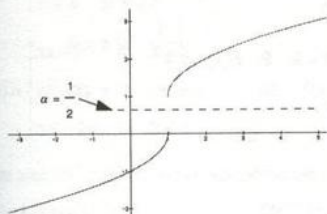
Teorema del valor intermedio

Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y si α es cualquier número para el cual $f(a) < \alpha < f(b)$ o $f(b) < \alpha < f(a)$, entonces existe un número c en $]a, b[$ tal que $f(c) = \alpha$

Las figuras que siguen ilustran en forma gráfica este teorema.

**Ejemplo 11**

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x} & \text{si } x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x-1} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$



Para esta función, $\alpha = \frac{1}{2}$ es tal que

$$f(0) = -1 < \alpha < 2 = f(2)$$

Sin embargo, no existe algún c en $]0, 2[$ tal que $f(c) = \alpha$. En efecto, esto sucede porque f no es continua en $]0, 2[$.

Ejemplo 12

Considere la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$

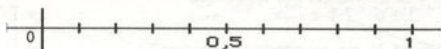
- Demuestre que esta ecuación tiene una raíz real entre 0 y 1
- Aproxime la raíz con un error menor que 0.1
- Considere la función $f(x) = x^3 + x - 1$. Esta función:

Solución

- Es continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$ y
- $f(0) = -1 < 0 < 1 = f(1)$

Entonces, por el teorema del valor intermedio, existe c entre 0 y 1 tal que $f(c) = 0$. O sea, tal que $c^3 + c - 1 = 0$. Es decir, existe un número real c que es raíz de la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$.

b) Se divide el intervalo $[0, 1]$ que contiene a la raíz c , en décimos.



Se evalúa la función $f(x) = x^3 + x - 1$ en cada décimo hasta encontrar dos de ellos consecutivos tales que los valores de f en ellos sean de signo contrario. En este caso,

$$f(0.6) = -0.184 < 0 < 0.043 = f(0.7)$$

Entonces, por el teorema del valor intermedio existe c en $]0.6, 0.7[$ tal que $f(c) = c^3 + c - 1 = 0$. En tal caso, c es raíz real de $x^3 + x - 1 = 0$ y $c \approx 0.6$.

Ejercicios 4.8

En los ejercicios del 1 al 10, trace la gráfica de la función y diga (analizando la gráfica) en qué puntos la función es continua y en cuáles es discontinua.

$$1. f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 3}$$

$$2. h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

$$3. g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x - 6}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \frac{2x - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$5. h(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$6. f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2}$$

$$7. g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1 \\ 3 - x & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

$$8. g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{1 - 4x^2}{x^2} & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

$$9. h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$10. f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 - x}}$$

En los ejercicios del 11 al 22, clasifique las discontinuidades de cada función como removibles o esenciales.

$$11. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

$$12. h(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1} - 2}{x}$$

$$13. g(x) = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$15. h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ [x + 1] & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

$$16. g(x) = \begin{cases} |x - 1| & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$17. f(x) = \begin{cases} \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$18. h(x) = \frac{1-3x^2}{x^2}$$

$$19. g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$20. f(x) = \begin{cases} \frac{4-4\cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$21. h(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$22. g(x) = \begin{cases} \frac{1+\cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En los ejercicios del 23 al 30, analice la continuidad de cada función en el punto x que se indica.

$$23. x = 0, f(x) = \begin{cases} x^2 \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$24. x = 0, g(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$25. x = 2, h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

$$26. x = 0, f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$27. x = 1, h(x) = \begin{cases} (x-1) \operatorname{sen} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$28. x = 1, f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

$$29. x = 0, g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2-1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

$$30. x = -1, f(x) = \begin{cases} |x+4| & \text{si } x < -1 \\ |x-2| & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

En los ejercicios del 31 al 36, determine los valores para a y b que hacen continua la función.

$$31. f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x < 1 \\ b+x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$32. h(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \leq 3 \\ ax+2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$33. g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ x^2+b & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$34. f(x) = \begin{cases} ax+2 & \text{si } x < 2 \\ x^2+b & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ ax+2b & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

$$35. f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x \leq a \\ 3x-2 & \text{si } a < x \leq b \\ 2bx-1 & \text{si } b < x \end{cases}$$

$$36. h(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < a \\ x^2 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

En los ejercicios del 37 al 50, aproxime las raíces reales de la ecuación con error menor que 0.1

$$37. x^3 - x - 1 = 0$$

$$38. x^3 - 3x^2 - 1 = 0$$

$$39. x^5 - 8x + 3 = 0$$

$$40. x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$41. x^4 - 8 = 0$$

$$42. x^2 - 3 = 0$$

$$43. x^3 - 2 = 0$$

$$44. x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$45. x^2 + x - 1 = 0$$

$$46. x^5 - 2 = 0$$

$$47. x^7 - 5 = 0$$

$$48. x^4 - 3 = 0$$

$$49. \frac{3}{x^2} - 1 = 0$$

$$50. 1 - \frac{3}{x^3} = 0$$

Del 51 al 60, diga cómo definiría la función dada para que sea continua en $x = 0$ (Justifique su respuesta.)

$$51. f(x) = \frac{\operatorname{In} \cos x}{x}$$

$$52. h(x) = \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$53. g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{3x^2 + 2x}$$

$$54. f(x) = x \cos \frac{1}{x}$$

55. $g(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$

56. $h(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

57. $f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x + x \cos x}$

58. $g(x) = x^{1/x}$

59. $h(x) = (\sec x)^{1/x}$

60. $f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{x}$

4.9

Formas indeterminadas $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0 , 0^∞ , ∞^0 , ∞^∞ , $\infty - \infty$, 1^∞

La mayoría de estas formas se calculan fácilmente con la regla de L'Hôpital que será vista en la sección 6.7 de este texto. Pero esta regla no funciona tan simple como se cree, sobre todo cuando se intenta resolver un límite como el que sigue

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^a}$$

en donde $a > 0$. Como otra alternativa, en esta sección se resuelven estas formas indeterminadas sin el uso de la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 1

$$\frac{0}{0}$$

Solución

Calcular el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + (\cos x - 1)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left((1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right)^{\cos x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \ln(1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1 + h)^{\frac{1}{h}} \quad (h = (\cos x - 1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0) \\ &= (-0)(1) = 0 \quad (\text{teorema 5 secc. 4.7}) \end{aligned}$$

Ejemplo 2

$$\infty/\infty$$

Solución

Calcular el $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^a}$ en donde $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0 \quad (\text{corolario 1 secc. 4.7})$$

Ejemplo 3 0^0 Calcular el $\lim_{x \rightarrow 0} x^{x^a}$ en donde $a > 0$ **Solución**

Por el corolario 1 de la sección 4.7, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{x^a} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln x^{x^a}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln x^{x^a}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x^a \ln x} = e^0 = 1$$

Ejemplo 4 0^∞ Calcular el $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1/x}$ **Solución**

$y = x^{1/x} \Leftrightarrow \ln y = \frac{\ln x}{x} = u$. Por el teorema 4 de la sección 4.7, $u \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 0$. Entonces, por el teorema 6 de la sección 4.7 se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln x^{1/x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln x^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln x^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

Ejemplo 5 ∞^0 Calcular el $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$ **Solución**

Por el teorema 4 de la sección 4.7, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^{1/x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^{1/x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$$

Ejemplo 6 ∞^∞ Calcular el $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x$ **Solución**

Si $u = x \ln x$; por el teorema 4 de la sección 4.7, se tiene que $u \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$. Entonces, por el teorema 6 de la sección 4.7 se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

Ejemplo 7 $\infty - \infty$ Calcular el $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x-1) - \ln x)$ **Solución**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x-1) - \ln x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x-1}{x} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} \right) \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right) = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 8 1^∞ Calcular el $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^x$

Solución

Si $y = \frac{1}{x}$, entonces usando el ejemplo 1 se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^x &= \lim_{y \rightarrow 0} (\cos y)^{1/y} = e^{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos y)}{1/y}} = e^{\lim_{y \rightarrow 0} \ln(\cos y) \cdot y} \\ &= e^{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos y)}{1/y}} = e^0 = 1\end{aligned}$$

Ejercicios 4.9

En los ejercicios del 1 al 25, suponga que $a > 0$, $b > 0$ y calcule cada límite.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sec x)^{1/x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x)^x$

9. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^{1-\frac{1}{x}}$

13. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x^a - a}{x^a - e^a}$

17. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{b^x - b^a}{x - a}$

21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{ax} + b)^{1/x}$

25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^a)}{x^a}$

14. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{x^a - e^a}{\ln x^a - a}$

18. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{b^{ax} - b^a}{x-1}$

22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x^{-a}}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{1/x}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^a} - 1}{x}$

15. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt[n]{e^{x^n} - 1}}$

19. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x$

23. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^a}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x}$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln x)$

12. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} \frac{\ln x^a + a}{x^a + e^{-a}}$

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x}$

20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{ax} + b)}{x}$

24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{mx} - e^{nx}}{x} \quad (m > n)$

5 LA DERIVADA

5.0

Introducción

Considere una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta



En la figura, x_1 denota la posición de la partícula en un tiempo t_1 , x_2 en un tiempo t_2 . En general, $x = x(t)$ es la posición de la partícula en un tiempo t . En cuyo caso

$$x_1 = x(t_1) \text{ y } x_2 = x(t_2)$$

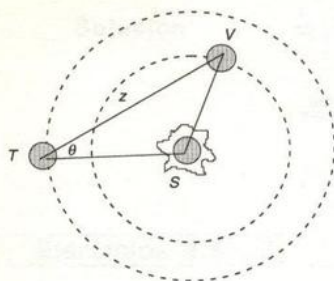
La diferencia $x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1)$ se llama *desplazamiento* de la partícula en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$. La velocidad media en dicho intervalo se define así

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Cuando el tiempo t se aproxima a un instante t_0 la velocidad media se aproxima a un valor $x'(t_0)$ llamado la *velocidad instantánea* de la partícula en t_0 ; por lo que

$$x'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

Este límite, si existe es la *derivada* de la función $x = x(t)$ en el instante t_0

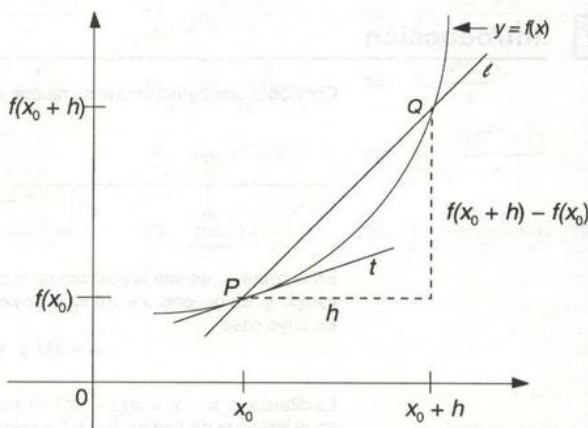


En este capítulo se encuentran algunas interpretaciones de la derivada, las reglas básicas para calcular derivadas y algunas de sus aplicaciones como la que sigue:

La figura adjunta muestra al Sol (S), a Venus (V) y a la Tierra (T) formando un triángulo en donde las distancias $TS = 1.5 \times 10^8$ km y $VS = 1.023 \times 10^8$ km son constantes. Considérese el ángulo θ con vértice en la Tierra variando de 0° a 47° . Si el ángulo θ crece a razón de $1.47 \times \frac{\pi}{180}$ radianes por año, ¿con qué rapidez se acerca Venus a la Tierra cuando su distancia a ella es 1.023×10^8 km?

5.1 Pendiente de la tangente a una curva

Considérese un punto fijo $P = (x_0, y_0)$ sobre la gráfica de una función $y = f(x)$



Sea ℓ la recta secante a la curva $y = f(x)$ por los puntos P y Q . Si m_ℓ denota la pendiente de la recta ℓ , entonces

$$m_\ell = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Nótese que, si el valor de h se hace pequeño, entonces:

1

El punto $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ se aproxima al punto $P = (x_0, f(x_0))$

2

La secante ℓ se aproxima a la tangente t a la curva $y = f(x)$ en el punto P .

3

La pendiente m_t tiende a la pendiente m_l de la recta tangente t .

Por lo que si $\lim_{h \rightarrow 0} m_t$ existe, se define m_l como sigue

$$m_l = \lim_{h \rightarrow 0} m_t$$

Precisando se dice que:

Definición 1

Si t es la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, entonces la *pendiente* m_l de t se define como

$$m_l = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2$ en el punto $(3, 9)$.

Solución

La ecuación de una recta conocidos un punto (x_0, y_0) de ella y su pendiente m , es de la forma

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (*)$$

En este caso, se conoce $(x_0, y_0) = (3, 9)$; además:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3 + h)^2 - (3)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6 + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6 \end{aligned}$$

Por lo que, sustituyendo los valores $x_0 = 3$, $y_0 = 9$ y $m = 6$ en la ecuación $(*)$ se obtiene la ecuación buscada. Observe:

$$y - 9 = 6(x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad y - 9 = 6x - 18 \quad \Leftrightarrow \quad 6x - y - 9 = 0$$

Definición 2

La recta *normal* a la gráfica de una función por uno de los puntos de ésta, es la perpendicular a la tangente en ese punto.

Ejemplo 2

Hallar la recta normal a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $(9, 3)$.

Solución

Si t es la tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en $(9, 3)$, entonces:

$$\begin{aligned} m_t &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + h} - \sqrt{9}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + h} - 3}{h} \cdot \frac{\sqrt{9 + h} + 3}{\sqrt{9 + h} + 3} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + h - 9}{h(\sqrt{9 + h} + 3)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{9 + h} + 3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Recuérdese que: "dos rectas son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario". Entonces, la ecuación

de la normal se obtiene así

$$y - 3 = -6(x - 9) \Leftrightarrow y - 3 = -6x + 54 \Leftrightarrow 6x + y - 57 = 0$$

Ejercicios 5.1

En los ejercicios del 1 al 6, encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto P dado.

1. $y = (x - 1)^2$; $P = (1, 0)$

2. $y = x^3$; $P(2, 8)$

3. $y = (x + 1)^3$; $P = (1, 8)$

4. $y = \sqrt[3]{x}$; $P = (1, 1)$

5. $y = x^2 - 4$; $P = (2, 0)$

6. $y = (x + 1)^2 - 1$; $P = (1, 3)$

En los ejercicios del 7 al 18, encuentre las ecuaciones de las rectas normal y tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto P que se indica. Además, en cada caso trace la gráfica de la función y las gráficas de las rectas tangente y normal.

7. $y = x^2 - 4$; $P = (1, -3)$

8. $y = \sqrt[3]{x}$; $P = (8, 2)$

9. $y = (x + 1)^2 - 2$; $P = (0, -1)$

10. $y = \frac{3}{x}$; $P = (1, 3)$

11. $y = \frac{5}{1 - x}$; $P = (-4, 1)$

12. $y = \frac{2}{x} + 1$; $P = (1, 3)$

13. $y = \sqrt{x}$; $P = (1, 1)$

14. $y = \sqrt{x - 1}$; $P = (5, 2)$

15. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $P = (1, 1)$

16. $y = \sqrt{2x + 1}$; $P = (4, 3)$

17. $y = \sqrt{x} - 1$; $P = (1, 0)$

18. $y = x - x^2$; $P = (2, -2)$

19. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2$ que es paralela a la recta $x + y - 3 = 0$

20. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3$ que es perpendicular a la recta $x + 3y + 1 = 0$

21. Encuentre la ecuación de la recta normal a la curva $y = \sqrt{x - 1}$ que es paralela a la recta $2x + y + 1 = 0$

22. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 3)$ y es paralela a la normal a la curva $y = x^2 - 2$ en el punto $(1, -1)$.

23. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, 3)$ y es perpendicular a la tangente a la curva $y = \sqrt{x} - 2$ en el punto $(4, 0)$.

24. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, -1)$ y es perpendicular a la tangente a la curva $y = x^3 + 1$ en el punto $(0, 1)$.

25. Halle la ecuación de la normal a la curva $y = (x + 1)^2$ que es perpendicular a la recta $x - 2y - 3 = 0$

26. ¿A qué distancia se encuentran del origen la normal y la tangente a la curva $y = \sqrt{x} + 1$ por el punto $(0, 1)$?

27. Encuentre los puntos sobre la curva $y = 2 - x^2$ en los que la recta tangente a ella pasa por el punto $(1, 5)$.

28. Encuentre los puntos de la curva $y = x^3 - 1$ en los que la recta normal a ella pasa por el origen.

5.2 La derivada como límite de una función

En la sección anterior fue visto que la pendiente m_t de la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ se define así

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

siempre que este límite exista.

En cursos de física este límite define la velocidad instantánea v de una partícula en el instante x_0 cuando ella recorre la trayectoria $y = f(x)$. O sea:

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Por lo importante que es este límite, la matemática le dio un nombre. Se le nombra *la derivada* de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 y se denota de las siguientes formas:

$f'(x)$ Se lee: "f prima de x" o "derivada de f respecto a x"

y' Se lee: "y prima"

$\frac{dy}{dx}$ Se lee: "derivada de y respecto a x" o "dy en dx"

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dx} f(x) \\ \frac{df(x)}{dx} \end{array} \right\}$$

$$\frac{df(x)}{dx}$$

$$D_x f(x)$$

Se leen: "derivada de f respecto a x"

Precisando se dice que:

Definición 1

La derivada de una función f es una función f' definida así:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para cada x tal que este límite existe.

Ejemplo 1

Si $f(x) = x^2 - x$, calcular $f'(x)$

Solución

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - (x+h) - x^2 + x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h-1) = 2x-1 \end{aligned}$$

Ejemplo 2Si $f(x) = \frac{1}{x-1}$, calcular $f'(x)$ **Solución**

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h-1} - \frac{1}{x-1}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(x-1) - (x+h-1)}{(x-1)(x+h-1)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(x-1)(x+h-1)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x-1)(x+h-1)} = \frac{-1}{(x-1)^2}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3Si $f(x) = \sqrt[3]{x}$, calcular $f'(x)$ **Solución**Tomando $a = \sqrt[3]{x+h}$ y $b = \sqrt[3]{x}$ y usando el hecho de que

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

se obtiene que:

$$\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x} = \frac{h}{(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h[(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} \\
 &= \frac{1}{x^{2/3} + x^{2/3} + x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}}
 \end{aligned}$$

ComentarioSi se considera $x_0 + h = x$, entonces $h = x - x_0$. De donde:

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow x_0 \Rightarrow h \rightarrow 0$$

O sea, la notación $h \rightarrow 0$ es equivalente con la notación $x \rightarrow x_0$ siempre que $x_0 + h = x$. Por lo que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Así que, otra forma de definir $f'(x)$ es como sigue:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ejemplo 4 Si $f(x) = \sqrt{x}$ con $x \geq 0$, calcular $f'(4)$

Solución

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ejemplo 5 ¿Existe la derivada de $f(x) = |x|$ en $x = 0$?

Solución

$f'(0)$ no existe, porque:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1$$

Definición

Una función es *diferenciable* o *derivable* en x , si existe su derivada en x .

Teorema 1

Si una función f es diferenciable en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$

Demostración

Por ser f diferenciable en $x = c$, se tiene que

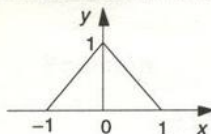
$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existe. Además $\lim_{x \rightarrow c} (x - c) = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(c) + f(c)] = \lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} (x - c) + f(c) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} (x - c) + \lim_{x \rightarrow c} f(c) \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \rightarrow c} (x - c) + \lim_{x \rightarrow c} f(c) \\ &= f'(c) \cdot 0 + f(c) = f(c) \end{aligned}$$

□

El recíproco de este teorema es falso; es decir, existen funciones continuas en un punto $x = c$, que no son diferenciables en $x = c$

Ejemplo 6**Demostración**

Considérese la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Demuéstrese que f es continua en $x = 0$ y no es diferenciable en $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1$$

Entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$. Así que f es continua en $x = 0$

Por otra parte:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h}{h} = -1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Entonces $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$ no existe. Así que, f no es diferenciable en $x = 0$

Ejemplo 7

Considérese la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Demuéstrese que f no es diferenciable en $x = 0$

Solución

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0)$, entonces f no es continua en $x = 0$

De donde, por el teorema 1 se concluye que f no es diferenciable en $x = 0$

Ejemplo 8

Considérese la función definida como sigue

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\tan x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Es f diferenciable en $x = 0$?

Solución

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \quad (\text{Véase ejemplo 1 de la sección 4.6})$$

Entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe. Por lo que, f no es continua. De donde, por el teorema 1 f no es diferenciable.

Definición 2

Una función f es *diferenciable* sobre un intervalo, si es diferenciable en cada punto del intervalo

Cabe mencionar que si el intervalo es un cerrado $[a, b]$, la diferenciable en los extremos a y b existe, si respectivamente existen los límites que siguen

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

O bien, si existen estos:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Ejemplo 9

Considérese la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

¿Es f diferenciable en $[1, \infty[$?

Solución

Si $a \in]1, \infty[$, entonces

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} (x+a) = 2a\end{aligned}$$

Además: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = 2$. Así que f es diferenciable en $[1, \infty[$

Ejercicios 5.2

En los ejercicios del 1 al 12, derive cada función usando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

1. $f(x) = 1 - x$

2. $f(x) = x^2 + x$

3. $f(x) = x$

4. $f(x) = \sqrt{x+1}$

5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

6. $f(x) = \frac{1}{x+2}$

7. $f(x) = x^2 - 3x + 1$

8. $h(x) = |x|$ (Sugerencia: $|x| = \sqrt{x^2}$)

9. $F(x) = 1 - x^2$

10. $G(x) = \frac{x-1}{1+x}$

11. $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$

12. $h(x) = \frac{5}{1-x}$

En los ejercicios del 13 al 24, calcule $f'(a)$ usando el valor de a dado y la fórmula

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

13. $f(x) = 1 - x$, $a = 0$

14. $f(x) = x^2 - 1$, $a = 3$

15. $f(x) = x^3$

16. $f(x) = \frac{-3}{x-1}$, $a = 1$

17. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $a = 4$

18. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $a = 0$

19. $f(x) = \sqrt{2x}$, $a = 2$

20. $f(x) = \frac{3x}{1-x}$, $a = 0$

21. $f(x) = \frac{2}{x}$, $a = 2$

22. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$, $a = 2$

23. $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $a = 1$

24. $f(x) = \sqrt{1-x}$, $a = -2$

25. ¿Existe la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 0$?

26. Considere la función definida como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Existe $f'(1)$?

27. ¿Es diferenciable $f(x) = [x-1]$ en $x = 0$?

28. Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \cos x & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Es diferenciable f en $x = 0$?

29. Considere la función f definida así

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Existe $f'(1)$?

5.3 Reglas de derivación

Existen reglas que simplifican el cálculo de una derivada. Enseguida se demuestran algunas de ellas.

Regla 1

Considérese una función constante $f(x) = c$. Entonces

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

Demostración

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dx} &= \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1

Si $f(x) = 3$, entonces $\frac{d3}{dx} = 0$

Regla 2

Si $f(x) = x$, entonces $\frac{dx}{dx} = 1$

Demostración

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dx} &= \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

□

En lo sucesivo cada vez que se mencione que una función es diferenciable, deberá entenderse que es diferenciable en un intervalo.

Regla 3

Si $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son funciones diferenciables, entonces $u + v$ es función diferenciable y

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Demostración

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(u+v)(x) &= (u+v)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u+v)(x+h) - (u+v)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
 &= u'(x) + v'(x) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}
 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2

$$\frac{d}{dx}(x+3) = \frac{dx}{dx} + \frac{d3}{dx} = 1 + 0 = 1$$

Regla 4

Regla de la cadena: Si g es diferenciable en x y f es diferenciable en $g(x)$, entonces $f \circ g$ es diferenciable en x , y

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
Demostración

Considérese $k = k(h) = g(x+h) - g(x)$. Entonces $g(x+h) = g(x) + k$ y

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + k) - f(g(x))}{k} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + k) - f(g(x))}{k} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= f'(g(x)) \cdot g'(x)
 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3

Considérese la función $f(x) = x^2$ con $f'(x) = 2x$ y obténgase con ello la derivada de $y = (x+3)^2$.

Solución

Considérese en este caso la función $g(x) = x+3$. Entonces:

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2$$

Nótese que $g'(x) = (x+3)' = \frac{dx}{dx} + \frac{d3}{dx} = 1 + 0 = 1$ y $f'(x+3) = 2(x+3)$. Por ello, usando la regla de la cadena, se tiene que

$$\begin{aligned}
 y' &= (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x+3) \cdot g'(x) \\
 &= 2(x+3) \cdot 1 = 2x+6
 \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Considérese la función $f(x) = \sqrt{x}$ con $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y obténgase con ello la derivada de $y = \sqrt{x+4}$.

Solución

En este caso se usará la función $g(x) = x+4$. Entonces:

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+4) = \sqrt{x+4}$$

Nótese que $g'(x) = 1$ y $f'(x+4) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$. Así que

$$\begin{aligned}
 y' &= (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(x+4) \cdot g'(x) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x+4}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}
 \end{aligned}$$

Lema 1

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

Demostración

Considérese $f(x) = |x|$. Entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}|x| &= \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \cdot \frac{|x+h| + |x|}{|x+h| + |x|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h|^2 - |x|^2}{h(|x+h| + |x|)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h(|x+h| + |x|)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h(|x+h| + |x|)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h(|x+h| + |x|)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x+h}{|x+h| + |x|} \\
 &= \frac{2x}{2|x|} = \frac{x}{|x|}
 \end{aligned}$$

□

**Regla 5**

$$\text{Si } u = u(x) \text{ entonces: } \frac{d}{dx}|u| = \frac{u}{|u|} \cdot \frac{du}{dx}$$

Demostración

Considérese $f(x) = |x|$. Entonces $(f \circ u)(x) = f(u(x)) = f(u) = |u|$. De donde

$$\frac{d}{dx}|u| = \frac{d}{dx}(f \circ u)(x) = (f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Por el lema 1, $f'(x) = \frac{x}{|x|}$. Así que, $f'(u(x)) = \frac{u(x)}{|u(x)|} = \frac{u}{|u|}$. Además

$$u'(x) = \frac{d}{dx} u(x) = \frac{d}{dx} u = \frac{du}{dx}$$

Entonces: $\frac{d}{dx}|u| = \frac{u}{|u|} \cdot \frac{du}{dx}$ □

Ejemplo 5

Calcular $\frac{d}{dx}|x-5|$

Solución

Considérese $u = x - 5$, entonces por la regla 5:

$$\frac{d}{dx}|x-5| = \frac{x-5}{|x-5|} \cdot \frac{d}{dx}(x-5) = \frac{x-5}{|x-5|}$$

Uno de los límites importantes en el cálculo diferencial es el que fue visto en el corolario 2 de la sección 4.8, a saber:

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$$

Este límite tiene otras formas equivalentes de expresarse, por ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{c}\right)^{c/h} \text{ con } c \neq 0$$

O sea, también: $e = \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{c}\right)^{c/h} \text{ con } c \neq 0$

Regla 6

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$$

Demostración

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log_a x &= \log'_a(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \cdot \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h} \\ &= \frac{1}{x} \log_a\left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}\right) = \frac{1}{x} \log_a e \end{aligned}$$
□

Corolario 1

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

Demostración

Dado que $\ln x = \log_e x$; entonces por la regla 6:

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x}$$

□

Regla 7

Si $u = u(x)$, entonces: $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$

Demostración

Considérese $f(x) = \ln x$. Entonces

$$(f \circ u)(x) = f(u(x)) = f(u) = \ln u.$$

De donde: $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{d}{dx} (f \circ u)(x) = (f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$

Pero por el corolario 1, $f'(x) = \frac{1}{x}$. Entonces $f'(u(x)) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{u}$

Además, por notación $u'(x) = \frac{d}{dx} u(x) = \frac{du}{dx}$. Así que:

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

□

Corolario 2

$$\frac{d}{dx} \ln|u| = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

Demostración

$$\frac{d}{dx} \ln|u| = \frac{1}{|u|} \frac{d}{dx} |u|$$

Regla 7

$$= \frac{1}{|u|} \cdot \frac{u}{|u|} \frac{du}{dx}$$

Regla 5

$$= \frac{u}{|u|^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

¿Por qué?

$$= \frac{u}{u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

Porque $|u|^2 = u^2$

$$= \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

¿Por qué?

□

Ejemplo 6

$$\frac{d}{dx} \ln|x+2| = \frac{1}{x+2} \frac{d}{dx} (x+2) = \frac{1}{x+2} \left(\frac{dx}{dx} + \frac{d2}{dx} \right) = \frac{1}{x+2}$$

Lema 2

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

Demostración

Considérese $y = e^x$. Entonces $\ln y = x$. De ello y las reglas 2 y 7 se tiene que

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} x \Leftrightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y$$

O sea: $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ □

Regla 8

Si $u = u(x)$ es diferenciable, entonces $y = e^u$ es diferenciable y

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

Demostración

Considérese $f(x) = e^x$. Entonces $(f \circ u)(x) = f(u(x)) = f(u) = e^u$. De donde:

$$\frac{d}{dx} e^u = \frac{d}{dx} (f \circ u)(x) = (f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Por el lema 2, $f'(x) = e^x$. Entonces $f'(u(x)) = f'(u) = e^u$. Además

$$u'(x) = \frac{d}{dx} u(x) = \frac{du}{dx}$$

Así que: $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$ □

Ejemplo 7

Derivar $y = e^{x+\sqrt{2}}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} e^{x+\sqrt{2}} = e^{x+\sqrt{2}} \frac{d}{dx} (x + \sqrt{2}) = e^{x+\sqrt{2}} \cdot 1 = e^{x+\sqrt{2}}$$

Regla 9

Si $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son funciones diferenciables, entonces uv es diferenciable y

$$\frac{d}{dx} uv = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Demostración

Si $u = 0$ o $v = 0$, el resultado es trivial. Considérese el caso no trivial. Para ello, tómese $y = uv$ con $u \neq 0$ y $v \neq 0$. Entonces $\ln |y| = \ln |uv|$. Por lo que

$$\frac{d}{dx} \ln |y| = \frac{d}{dx} \ln |uv| = \frac{d}{dx} \ln |u| + \frac{d}{dx} \ln |v| = \frac{d}{dx} (\ln |u| + \ln |v|) \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= \frac{d}{dx} \ln |u| + \frac{d}{dx} \ln |v| = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} \quad (\text{Regla 3 y corolario 2})$$

Además por el corolario 2, $\frac{d}{dx} \ln |y| = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$. Entonces

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}$$

De donde, $\frac{dy}{dx} = y \left(\frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} \right)$. O sea $\frac{d}{dx} uv = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ □

Corolario 3

Si c es una constante y $u = u(x)$ es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx} cu = c \frac{du}{dx}$$

Demostración

$$\frac{d}{dx} cu = c \frac{du}{dx} + u \frac{dc}{dx} = c \frac{du}{dx} \quad (\text{Reglas 9 y 1})$$

□

Ejemplo 8

Derivar $y = 5e^{x+3}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} 5e^{x+3} = 5 \frac{d}{dx} e^{x+3} = 5 \cdot e^{x+3} \frac{d}{dx} (x+3) = 5e^{x+3} \cdot 1 = 5e^{x+3}$$

Regla 10

Si $u = u(x)$ es diferenciable y n es cualquier número, entonces

$$\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

Demostración

Si $u = 0$ el resultado es obvio. Se considerará el caso no trivial ($u \neq 0$).

Para ello, considérese $y = u^n$. Entonces $|y| = |u^n| = |u|^n$. De donde:

$$\frac{d}{dx} \ln|y| = \frac{d}{dx} \ln|u|^n \quad \text{Porque: } |y| = |u|^n$$

$$= \frac{d}{dx} n \ln|u| \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= n \cdot \frac{d}{dx} \ln|u| \quad \text{Corolario 3}$$

$$= n \cdot \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad \text{Corolario 2}$$

Por otra parte, por el corolario 2 se tiene que $\frac{d}{dx} \ln|y| = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$

Entonces:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = n \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

De donde

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot n \cdot \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$= u^n \cdot n \cdot \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad \text{¿Por qué?}$$

$$= nu^{n-1} \frac{du}{dx} \quad \text{¿Por qué?}$$

□

Corolario 4

Para cada $n \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

Demostración

Sigue inmediatamente de la regla 10.

□

Ejemplo 9Derivar $y = (x^2 + 3x)^3$ **Solución**

$$y' = \frac{d}{dx} (x^2 + 3x)^3 = 3(x^2 + 3x)^{3-1} \frac{d}{dx} (x^2 + 3x) = 3(x^2 + 3x)^2 (2x + 3)$$

Ejemplo 10Si $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$, calcular $f'(x)$.**Solución**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \sqrt[3]{1-x^2} = \frac{d}{dx} (1-x^2)^{1/3} = \frac{1}{3} (1-x^2)^{1/3-1} \frac{d}{dx} (1-x^2) \\ &= \frac{1}{3} (1-x^2)^{-2/3} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{3(1-x^2)^{2/3}} = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} \end{aligned}$$

Ejemplo 11Calcular $\frac{d}{dx} \ln \sqrt{x}$ **Solución**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln \sqrt{x} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{d}{dx} (x)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{1/2-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{2|x|} \end{aligned}$$

Ejemplo 12Si $-1 < x < 1$, derivar $y = x\sqrt{1-x^2}$ **Solución**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x\sqrt{1-x^2} &= x \frac{d}{dx} \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{dx} \\ &= x \frac{d}{dx} (1-x^2)^{1/2} + \sqrt{1-x^2} = x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-1/2} (-2x) + \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{-x^2}{(1-x^2)^{1/2}} + \sqrt{1-x^2} = \frac{-x^2 + \sqrt{1-x^2}(1-x^2)^{1/2}}{(1-x^2)^{1/2}} \\ &= \frac{-x^2 + \sqrt{(1-x^2)^2}}{(1-x^2)^{1/2}} = \frac{-x^2 + |1-x^2|}{(1-x^2)^{1/2}} = \frac{-x^2 + 1 - x^2}{(1-x^2)^{1/2}} = \frac{1-2x^2}{(1-x^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Nota

En este ejemplo fue necesario restringir la función $y = x\sqrt{1-x^2}$ al intervalo $]-1, 1[$; o sea, se mencionó que $-1 < x < 1$ lo cual implica que $1-x^2 > 0$, para tener que

$$\sqrt{1-x^2}(1-x^2)^{1/2} = (\sqrt{1-x^2})^2 = \sqrt{(1-x^2)^2} = |1-x^2| = 1-x^2$$

Es costumbre en el cálculo de derivadas, dar por hecho que $u \geq 0$ cuando aparece que $\sqrt{u^2} = u$. Ello será así, a menos que $u < 0$ en cuyo caso $\sqrt{u^2} = |u| = -u$

Regla 11

Si $u = u(x)$ y $v = v(x) \neq 0$ son diferenciables, entonces $\frac{u}{v}$ es diferenciable y

$$\frac{d}{dx} \frac{u}{v} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Demostración

Sigue inmediatamente de las reglas 9 y 10 tomando $\frac{u}{v} = uv^{-1}$ □

Ejemplo 13

Derivar $y = \frac{x-1}{1+x^2}$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x-1}{1+x^2} \right) = \frac{(1+x^2) \frac{d}{dx}(x-1) - (x-1) \frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{(1+x^2)(1) - (x-1)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2+2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2+2x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Lema 3

- a) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
 b) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

Demostración

a) Considérese la función $f(x) = \sin x$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin x &= \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \sin h \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \\ &= (\sin x)(0) + (1)(\cos x) = \cos x \end{aligned}$$

b) Es análogo a la demostración del inciso anterior. □

Regla 12

Si $u = u(x)$ es una función diferenciable, entonces:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{d}{dx} \operatorname{sen} u &= \cos u \frac{du}{dx} \\ \text{b) } \frac{d}{dx} \cos u &= -\operatorname{sen} u \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

Demostración

a) Considérese $f(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces $f'(x) = \cos x$ (lema 3), y

$$(f \circ u)(x) = f(u(x)) = f(u) = \operatorname{sen} u$$

Por lo que, usando la regla 4 se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{sen} u &= \frac{d}{dx} (f \circ u)(x) = (f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x) \\ &= f'(u) \cdot u'(x) = \cos u \cdot \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

b) Sigue de la regla 4 y el lema 3 considerando $f(x) = \cos x$ □

Ejemplo 14

Si $y = \sqrt{1 - \cos x^2}$, calcular $\frac{dy}{dx}$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \sqrt{1 - \cos x^2} = \frac{1}{2} (1 - \cos x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx} (1 - \cos x^2) \\ &= \frac{1}{2} (1 - \cos x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot \frac{d}{dx} x^2 \\ &= \frac{1}{2} (1 - \cos x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot 2x = \frac{x \operatorname{sen} x^2}{\sqrt{1 - \cos x^2}} \end{aligned}$$

Lema 4

$$\text{a) } \frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$\text{c) } \frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$

$$\text{b) } \frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{csc}^2 x$$

$$\text{d) } \frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$$

Demostración

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{d}{dx} \tan x &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \frac{d}{dx} \cos x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

b), c) y d) se demuestran en forma análoga a lo hecho con la derivada de la tangente. Para ello, se toma en cuenta que

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{y} \quad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad \square$$

Regla 13

Si $u = u(x)$ es una función diferenciable, entonces:

$$a) \frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$c) \frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$b) \frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

$$d) \frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

Demostración

a) Considérese la función $f(x) = \tan x$. Entonces

$$(f \circ u)(x) = f(u(x)) = f(u) = \tan u$$

Así que; por la regla 4,

$$\frac{d}{dx} \tan u = \frac{d}{dx} (f \circ u)(x) = (f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

Pero por el lema 4, $f'(x) = \sec^2 x$. Entonces

$$f'(u(x)) = f'(u) = \sec^2 u$$

$$\text{Además: } u'(x) = \frac{du}{dx}$$

$$\text{Entonces: } \frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

b), c) y d) se demuestran en forma similar. □

Ejemplo 15

Si $y = \tan \sqrt{x}$, calcular $\frac{dy}{dx}$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \tan \sqrt{x} = \sec^2 \sqrt{x} \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \sec^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} \\ &= \sec^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{\sec^2 \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Ejemplo 16

Si $y = \sqrt{\sec^2 5x}$, calcular $\frac{dy}{dx}$

Solución

Nótese que $y = \sqrt{\sec^2 5x} = |\sec 5x|$. Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} |\sec 5x| = \frac{\sec 5x}{|\sec 5x|} \frac{d}{dx} \sec 5x && \text{Regla 5} \\ &= \frac{\sec 5x}{|\sec 5x|} \cdot \sec 5x \cdot \tan 5x \cdot \frac{d}{dx} 5x && \text{Regla 13} \\ &= \frac{5 \sec^2 5x \tan 5x}{|\sec 5x|} && \text{¿Por qué?} \end{aligned}$$

$$= \frac{5|\sec 5x|^2 \tan 5x}{|\sec 5x|} = 5|\sec 5x| \tan 5x \quad \text{¿Por qué?}$$

Ejemplo 17Calcular $\frac{d}{dx} \cot \sqrt{3x+1}$ **Solución**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \cot \sqrt{3x+1} &= -\csc^2 \sqrt{3x+1} \frac{d}{dx} \sqrt{3x+1} \\ &= -\csc^2 \sqrt{3x+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3x+1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx} (3x+1) \\ &= -\csc^2 \sqrt{3x+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3 = -\frac{3\csc^2 \sqrt{3x+1}}{2\sqrt{3x+1}} \end{aligned}$$

Ejemplo 18Si $y = e^{\csc 5x}$, calcular $\frac{dy}{dx}$ **Solución**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} e^{\csc 5x} = e^{\csc 5x} \frac{d}{dx} \csc 5x = e^{\csc 5x} (-\csc 5x \cot 5x) \frac{d}{dx} (5x) \\ &= -5e^{\csc 5x} \csc 5x \cot 5x \end{aligned}$$

Lema 5

a) $\frac{d}{dx} \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = \frac{-1}{1+x^2}$

b) $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

c) $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

f) $\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

DemostraciónConsidérese $y = \arcsen x$. Entonces $\sen y = x$. De ello y las reglas 2 y 12 se tiene

$$\frac{d}{dx} \sen y = \frac{dx}{dx} \Leftrightarrow \cos y \frac{dy}{dx} = 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \quad (*)$$

Pero, $\cos^2 y + \sen^2 y = 1$. Entonces $\cos y = \sqrt{1 - \sen^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Así que, sustituyendo a y , y a $\cos y$ en la relación (*) se tiene que

$$\frac{d}{dx} \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) Es análoga a la demostración del inciso a).

c) Considérese $y = \arctan x$. Entonces $\tan y = x$. De ello y las reglas 2 y 13 se tiene

$$\frac{d}{dx} \tan y = \frac{dx}{dx} \Leftrightarrow \sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} \quad (**)$$

Pero, $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$. Entonces $\sec^2 y = 1 + x^2$. Así que, sustituyendo a y , y a $\sec^2 y$ en la relación (**) se tiene

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

d) Es análoga a la demostración del inciso c).

e) Considérese $y = \operatorname{arc} \sec x$, entonces $\sec y = x$. De ello y las reglas 2 y 13 se tiene

$$\frac{d}{dx} \sec y = \frac{dx}{dx} \Leftrightarrow \sec y \tan y \frac{dy}{dx} = 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} \quad (***)$$

Pero, $\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$. Así que, sustituyendo a y , a $\tan y$, y a $\sec y$ en la relación (***) se tiene:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \sec x = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

f) Es análoga a la demostración del inciso e). □

Regla 14

Si $u = u(x)$ es una función, entonces

$$a) \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{sen} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$d) \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \cot u = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$b) \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \cos u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

$$e) \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \sec u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

$$c) \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \tan u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

$$f) \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \csc u = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$$

Demostración

Es consecuencia inmediata de la regla 4 y el lema 5. □

Ejemplo 19

Si $f(x) = \ln \operatorname{arc} \sec \sqrt{x}$, calcular $f'(x)$

Solución

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \ln \operatorname{arc} \sec \sqrt{x} = \frac{1}{\operatorname{arc} \sec \sqrt{x}} \cdot \frac{d}{dx} \operatorname{arc} \sec \sqrt{x} \\ &= \frac{1}{\operatorname{arc} \sec \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{\operatorname{arc} \sec \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2x\sqrt{x-1} \operatorname{arc} \sec \sqrt{x}} \end{aligned}$$

Regla 15

Si $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son funciones diferenciables, entonces:

$$\frac{d}{dx} u^v = u^v \left(\frac{v}{u} \frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx} \right)$$

Demostración

Considérese $y = u^v$. Entonces:

$$\ln y = \ln u^v = v \ln u \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} v \ln u \quad \text{¿Por qué?}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = v \frac{d}{dx} \ln u + \ln u \frac{dv}{dx} \quad \text{Reglas 7 y 9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y \left(\frac{v}{u} \frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx} \right) \quad \text{Regla 7}$$

$$\text{O sea, } \frac{d}{dx} u^v = u^v \left(\frac{v}{u} \frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx} \right) \quad \square$$

Ejemplo 20

Calcular $\frac{d}{dx} (1+x)^{1/x}$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (1+x)^{1/x} &= (1+x)^{1/x} \left(\frac{1}{1+x} \cdot \frac{d}{dx} (1+x) + \ln(1+x) \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) \right) \\ &= (1+x)^{1/x} \left(\frac{1}{x(1+x)} + \ln(1+x) (-x^{-2}) \right) \\ &= (1+x)^{1/x} \left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2} \ln(1+x) \right) \end{aligned}$$

Ejercicios 5.3

En los ejercicios del 1 al 81, calcule y' con las reglas.

1. $y = 3x^2$

2. $y = 2x^3$

3. $y = \frac{5}{x^3}$

4. $y = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$

5. $y = \frac{6}{1-3x}$

6. $y = \frac{1}{(1-x)^2}$

7. $y = x(x^2 - 1)$

8. $y = (3x+1)^2$

9. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

10. $y = (3t^2 + 2)(t^2 - 3t - 1)$

11. $y = \frac{1}{2x^2 + 1}$

12. $y = \frac{t^2 - 1}{1-t}$

13. $y = \sqrt[3]{x-1}$

14. $y = \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$

15. $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

$$\frac{d}{dx} u^v = v u^{v-1} \left(u \frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx} \right)$$

$$16. y = \frac{3}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

$$19. y = \frac{|x-1|}{|1-2x|}$$

$$22. y = -3\sqrt[4]{9t^2 - 1}$$

$$25. y = \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right)^{3/2}$$

$$28. y = \sqrt{x^2 - 18x + 9}$$

$$31. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x-4}{3|x|}$$

$$34. y = \frac{e^{3x}(\sin x + 3 \cos x)}{10}$$

$$37. y = x \arcsin \tan \frac{x}{2} - \ln x^2$$

$$40. y = \ln |\sec x| - \ln |\cos x|$$

$$43. y = \sin \frac{1}{x}$$

$$46. y = \sin x \cos x$$

$$49. y = \tan 3x$$

$$52. y = \frac{\sin x}{\cos x - 1}$$

$$55. y = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$58. y = x + \tan x$$

$$61. y = x \arccos \frac{x}{2}$$

$$64. y = \arccsc \frac{x-1}{1+x}$$

$$67. y = \frac{x}{8} (20 - 2x^2) + 6 \arcsin \frac{x}{2}$$

$$70. y = \sqrt{t^2 - 1} - 5 \arccos \sec \frac{x}{5}$$

$$73. y = \sqrt{4 - x^2} - 2 \ln \left| \frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{x} \right|$$

$$17. y = \left(t - \frac{1}{t} \right)^{3/2}$$

$$20. y = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$23. y = \sqrt{t+1} - \sqrt{1-t}$$

$$26. y = \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t}$$

$$29. y = 3(1-t)\sqrt{t+1}$$

$$32. y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} \right|$$

$$35. y = xe^x - e^x$$

$$38. y = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{1/x}$$

$$41. y = x \sec \frac{1}{x}$$

$$44. y = \frac{1 - \cosh}{h}$$

$$47. y = \frac{1}{\cos x}$$

$$50. y = \sqrt{1 + \cos 2x}$$

$$53. y = \frac{1}{\sin x}$$

$$56. y = \sqrt{\sec^2 t - 1}$$

$$59. y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

$$62. y = \arctan \sqrt{x+1}$$

$$65. y = \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3}$$

$$68. y = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$71. y = \sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3}$$

$$74. y = \frac{xe^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25}$$

$$18. y = |3x^2 - 2x + 1|$$

$$21. y = \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

$$24. y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

$$27. y = |x^2 - 4|$$

$$30. y = \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \right)^{1/3}$$

$$33. y = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{3-x} \right|$$

$$36. y = e^{\arcsin 2x^2}$$

$$39. y = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

$$42. y = \sin(3x - 1)$$

$$45. y = \cos 3x$$

$$48. y = \sec \sqrt{x}$$

$$51. y = \frac{x}{1 - \cos x}$$

$$54. y = 2 \sin x \cos x$$

$$57. y = \sec \sqrt{x+1}$$

$$60. y = \arcsin 3x$$

$$63. y = x \arcsin \frac{x}{3} + \sqrt{9 - x^2}$$

$$66. y = \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$$

$$69. y = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{10x-2}{2\sqrt{5}}$$

$$72. y = \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}|$$

$$75. y = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{x e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4}$$

76. $y = \ln|\sec x + \tan x|$

77. $y = x^{\sin x}$

78. $y = (e^x)^{\tan \frac{x}{2}}$

79. $y = \ln|\csc x - \cot x|$

80. $y = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right|$

81. $y = \left(\cos \frac{1}{x}\right)^x$

5.4 n-ésima derivada de una función

Ejemplo 1

Si $f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 2$, calcular $\frac{d}{dx}f(x)$ y $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$.

Solución

Como $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 + 5x^2 - 3x + 2) = 3x^2 + 10x - 3$, entonces:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d}{dx}(3x^2 + 10x - 3) = 6x + 10$$

Nota

$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$ se llama "la segunda derivada de f " o "la derivada de orden 2 de f " y se denota como sigue

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$$

También se le denota así: $f''(x)$, $f^{(2)}$, y'' o $y^{(2)}$ (con $y = f(x)$)

En términos generales, al derivar n veces sucesivas una función $y = f(x)$ se obtiene "la n -ésima derivada" o "la derivada de orden n " de la función, lo cual se denota como

$$y^{(n)}, f^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n}, \text{ o } \frac{d^n}{dx^n}f(x)$$

Ejemplo 2

Si $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, entonces:

$$\begin{aligned} \text{a) } f^{(2)}(x) &= \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 2x)\right) \\ &= \frac{d}{dx}(3x^2 - 6x + 2) = 6x - 6 \end{aligned}$$

$$\text{b) } f^{(3)}(x) = \frac{d^3}{dx^3}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right) = \frac{d}{dx}(6x - 6) = 6$$

$$\text{c) } f^{(4)}(x) = \frac{d^4}{dx^4}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3}{dx^3}f(x)\right) = \frac{d}{dx}(6) = 0$$

Así como la primera derivada de una función $y = f(x)$ se interpreta como la *velocidad instantánea* de un cuerpo en movimiento en un instante t , la segunda derivada de $y = f(x)$ es de hecho la derivada de la velocidad y se conoce como la *aceleración* de dicho cuerpo en el instante t . O sea

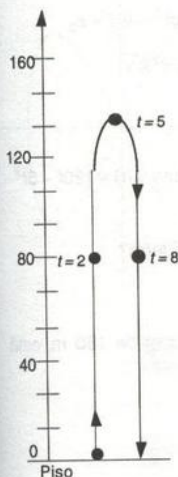
La *velocidad* es la rapidez de cambio de la posición $y = f(x)$, y la *aceleración* es la rapidez de cambio de la velocidad $v = f'(t)$ (la rapidez con que el cuerpo aumenta o disminuye su velocidad).

Ejemplo 3

Un objeto es lanzado verticalmente desde el piso hacia arriba alcanzando aproximadamente una altura $s(t) = 50t - 5t^2$ metros en t segundos.

- ¿Con qué velocidad fue lanzado el objeto?
- ¿Qué altura máxima alcanza el objeto?
- ¿Cuál es la aceleración del objeto?
- ¿Cuál es la velocidad del objeto en el ascenso y en el descenso, cuando está a 80 metros sobre el piso?

Solución



- La velocidad de lanzamiento del objeto es la velocidad inicial del objeto, la cual se obtiene cuando $t = 0$. Dado que

$$v(t) = s'(t) = 50 - 10t$$

$$\text{entonces } v(0) = 50 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

- La altura máxima que alcanza el objeto se obtiene en el instante en que la velocidad se hace cero, lo cual ocurre cuando

$$50 - 10t = 0$$

O sea, $t = 5$ seg. Así que, la altura máxima se calcula así

$$s(5) = 50(5) - 5(5)^2 = 250 - 125 = 125$$

O sea, $s(5) = 125$ m.

- La aceleración se obtiene como sigue

$$a(t) = v'(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}(50 - 10t) = -10$$

O sea, $a(t) = -10 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$. En este caso la aceleración es constante.

- Se calcula el instante en que $s(t) = 80$

$$s(t) = 80 \quad \Leftrightarrow \quad 50t - 5t^2 = 80 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 10t + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-8)(t-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 8 \text{ seg o } t = 2 \text{ seg}$$

Es decir, en ascenso el objeto alcanza los 80 m de altura en el instante $t = 2$ seg y vuelve a estar a esa altura en el instante $t = 8$ seg del descenso; por lo que, a esa altura en ascenso la velocidad es

$$v(2) = 50 - 10(2) = 50 - 20 = 30$$

O sea $v(2) = 30 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$, y en descenso la velocidad es

$$v(8) = 50 - 10(8) = 50 - 80 = -30$$

Es decir $v(8) = -30 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$

Ejercicios 5.4

En los ejercicios del 1 al 20, calcule la primera y segunda derivadas de cada función.

1. $f(x) = x^2 - 3x - 4$

2. $f(x) = \frac{x^5}{3} - 8x^3 - 3x + 4$

3. $y = x^2 - \frac{1}{x} + x$

4. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - x + \sqrt{x}$

5. $f(x) = x\sqrt{x}$

6. $f(x) = \sin x + \cos x$

7. $f(x) = xe^{x^2}$

8. $f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x^2}$

9. $y = x(\ln x + e^x)$

10. $y = (x+1)(1-x)$

11. $g(x) = x \ln x$

12. $h(x) = \frac{\sin x}{x}$

13. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

14. $y = e^{\sin x}$

15. $f(t) = gt^2 + v_0t + s_0$

16. $y = \frac{3}{4t^2}$

17. $y = x^2(3x^3 - 2)$

18. $g(x) = x^2\sqrt[3]{x}$

19. $h(x) = \frac{3x}{1-x}$

20. $f(x) = \arcsin x$

21. Se dispara verticalmente hacia arriba un proyectil y alcanza aproximadamente una altura $s(t) = 120t - 5t^2$ metros en t segundos.

- ¿En cuánto tiempo alcanza el proyectil una altura de 640 m?
- ¿Qué velocidad lleva el proyectil en el descenso a 540 m sobre la superficie de la Tierra?
- ¿En cuánto tiempo alcanza el proyectil su máxima altura?
- ¿Cuál es la altura máxima del proyectil?

22. La posición en el descenso de una piedra que se deja caer libremente desde una altura de 180 m, está dada en forma aproximada por $s(t) = 5t^2$ metros en t segundos.

- ¿Qué tiempo tarda en tocar el suelo la piedra?
- ¿Cuál es su velocidad al tocar el suelo?

23. La distancia recorrida por un automóvil está dada por $s(t) = v_0t + 4t^2$ metros en t segundos, en donde v_0 es la velocidad inicial del automóvil.

- ¿En cuánto tiempo alcanza una velocidad de $16 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ partiendo del reposo?
- ¿Qué distancia recorrerá el automóvil en ese tiempo?
- ¿Cuál es la aceleración del automóvil?

24. Si una pelota que pesa w kilogramos, recorre $w^2 + 4w + 8$ metros sobre un plano inclinado, ¿con qué velocidad recorre dicho plano una pelota que pesa 2 kilogramos?

25. Después de varios años, Jacinto sabe que si aplica x gramos de fertilizante a su higuera, ella produce $55x - x^2 - 625$ kilogramos de higos. ¿Cuál es la velocidad de producción si aplica 25 gramos de fertilizante?

5.5 Derivación implícita

Cuando una variable está despejada en una ecuación, se dice que la variable está definida en forma *explícita* por la ecuación.

Ejemplo 1

En la ecuación $y = x \operatorname{sen} x$ la variable y está definida en forma explícita por dicha ecuación.

Existen ecuaciones como

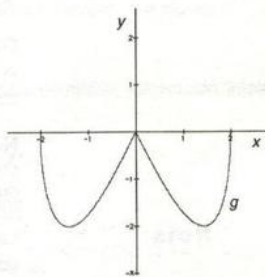
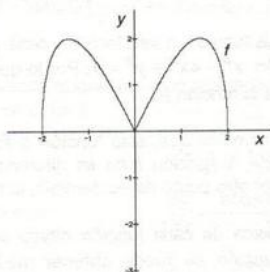
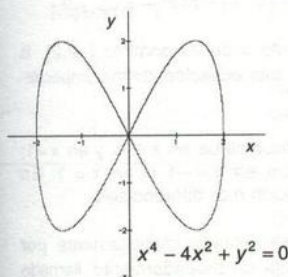
$$x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$$

En las que ninguna variable está en forma explícita. No obstante, existen funciones $y = f(x)$ que para cada x en su dominio, satisfacen esa ecuación.

Ejemplo 2

Considérense las funciones f y g definidas en $[-2, 2]$ como sigue

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4} \quad \text{y} \quad g(x) = -\sqrt{4x^2 - x^4}$$



Nótese que:

1

Para cada x en $[-2, 2]$:

$$x^4 - 4x^2 + y^2 = x^4 - 4x^2 + (f(x))^2 = x^4 - 4x^2 + (\sqrt{4x^2 - x^4})^2 = 0$$

2

Para cada x en $[-2, 2]$:

$$x^4 - 4x^2 + y^2 = x^4 - 4x^2 + (g(x))^2 = x^4 - 4x^2 + (-\sqrt{4x^2 - x^4})^2 = 0$$

O sea, las funciones f y g en cada punto x de $[-2, 2]$ satisfacen la ecuación $x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$

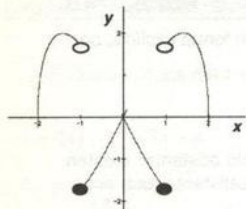
En tal caso, se dice que cada una de las funciones f y g está definida en forma *implícita* por la ecuación $x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$. Precisando se dice que:

Definición

Una función está definida en forma *implícita* por una ecuación, si satisface en cada punto de su dominio la ecuación

Las funciones f y g del ejemplo 2, no son las únicas que en forma implícita están definidas por la ecuación $x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$. Observe:

Ejemplo 3



Considérese la función

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 - x^4} & \text{si } -2 \leq x < -1 \text{ o } 1 < x \leq 2 \\ -\sqrt{4x^2 - x^4} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Nótese que:

- Para cada x tal que $-2 \leq x < -1$ o $1 < x \leq 2$:

$$x^4 - 4x^2 + y^2 = x^4 - 4x^2 + (h(x))^2 = x^4 - 4x^2 + (\sqrt{4x^2 - x^4})^2 = 0$$

- Para cada x tal que $-1 \leq x \leq 1$:

$$x^4 - 4x^2 + y^2 = x^4 - 4x^2 + (h(x))^2 = x^4 - 4x^2 + (-\sqrt{4x^2 - x^4})^2 = 0$$

O sea, la función h satisface en cada punto x de su dominio $[-2, 2]$, la ecuación $x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$. Por lo que, esta ecuación define implícitamente a la función h .

Nótese también que, esta función h es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$; de donde, la función h no es diferenciable en $x = -1$ ni en $x = 1$. En cualquier otro punto de su dominio, la función h es diferenciable.

Nota

La derivada de cada función diferenciable definida implícitamente por una ecuación, se puede obtener mediante un procedimiento llamado *derivación implícita*, el cual consiste en derivar ambos miembros de la ecuación respecto a la variable independiente (x si $y = f(x)$) y luego despejar de ello la derivada (y' o $\frac{dy}{dx}$).

En lo sucesivo cuando se derive implícitamente una función en un punto x , se dará por hecho que la función es diferenciable en x . Si sucede lo contrario se hará notar que la función no es diferenciable en x , en cuyo caso la derivación implícita no procede.

Ejemplo 4

Calcular $\frac{dy}{dx}$, si $y^2 x^2 + x^3 = 4$

Solución

Se derivan respecto a x ambos lados de $y^2 x^2 + x^3 = 4$

$$\frac{d}{dx}(y^2 x^2 + x^3) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{d}{dx}(y^2 x^2) + \frac{d}{dx}(x^3) = 0$$

Por ser y función de x , se tiene

$$\frac{d}{dx}(y^2 x^2) = y^2 \frac{d}{dx}(x^2) + x^2 \frac{d}{dx}(y^2) = 2xy^2 + 2x^2 y \frac{dy}{dx}$$

Además: $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$. Entonces, $2xy^2 + 2x^2 y \frac{dy}{dx} + 3x^2 = 0$

De donde: $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 2xy^2}{2x^2 y}$

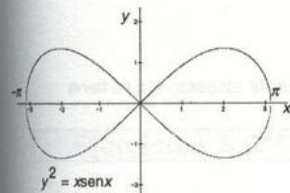
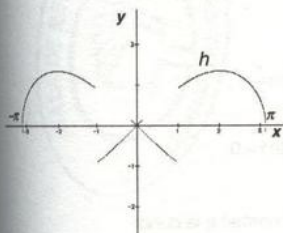
Ejemplo 5

Considérese la función

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x \operatorname{sen} x} & \text{si } -\pi \leq x < -1 \text{ o } 1 < x \leq \pi \\ -\sqrt{x \operatorname{sen} x} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Calcular $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Método 1



En el intervalo $[-\pi, \pi]$, se tiene que $y = h(x) = \pm \sqrt{x \operatorname{sen} x}$. De donde

$$y^2 = x \operatorname{sen} x$$

Derivando respecto a x ambos lados de esta ecuación (derivación implícita) se obtiene:

$$2y \frac{dy}{dx} = x \cos x + \operatorname{sen} x$$

De donde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cos x + \operatorname{sen} x}{2y}$$

O sea:

$$h'(x) = \frac{x \cos x + \operatorname{sen} x}{2h(x)}$$

Por lo que, para $x = \frac{\pi}{2}$:

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{2h\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\frac{\pi}{2}(0) + 1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}$$

Método 2

Para valores cercanos a $x = \frac{\pi}{2}$, $h(x) = \sqrt{x \operatorname{sen} x}$. Entonces,

$$h'(x) = \frac{x \cos x + \operatorname{sen} x}{2\sqrt{x \operatorname{sen} x}}$$

De donde:

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}$$

Ejemplo 6

Si $x = 2e^{\sqrt{1-y}}$, calcular $\frac{dy}{dx}$ en el punto (2,1).

Método 1

Diferenciando implícitamente respecto a x la ecuación $x = 2e^{\sqrt{1-y}}$ se tiene

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(2e^{\sqrt{1-y}})$$

$$1 = 2e^{\sqrt{1-y}} \frac{d}{dx}\sqrt{1-y}$$

$$1 = e^{\sqrt{1-y}} \frac{-\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1-y}}$$

$$\text{De donde: } \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y}}{e^{\sqrt{1-y}}}$$

$$\text{Por lo que, en el punto } (2,1): \frac{dy}{dx} = -\frac{0}{1} = 0.$$

Método 2

Despejando a y, se tiene

$$x = 2e^{\sqrt{1-y}} \Rightarrow \ln \frac{x}{2} = \sqrt{1-y} \Rightarrow \left(\ln \frac{x}{2}\right)^2 = 1-y \Rightarrow y = 1 - \left(\ln \frac{x}{2}\right)^2$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(1 - \left(\ln \frac{x}{2} \right)^2 \right) = - \left(2 \ln \frac{x}{2} \right) \left(\frac{2}{x} \right) \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{2}{x} \ln \frac{x}{2}$$

$$\text{Por lo que, en el punto } (2,1): \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{2} \ln \frac{2}{2} = -\ln 1 = 0$$

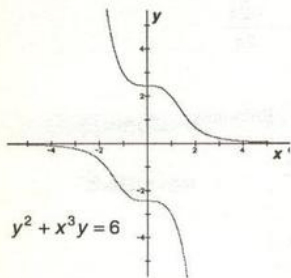
Ejemplo 7

Encontrar ecuaciones para las rectas tangente y normal a la curva

$$y^2 + x^3 y = 6$$

en el punto (1,2).

Solución



Derivando la ecuación $y^2 + x^3 y = 6$ implícitamente respecto a x se tiene

$$2y \frac{dy}{dx} + x^3 \frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 0$$

$$\text{De donde: } \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 y}{x^3 + 2y}$$

$\frac{dy}{dx}$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y^2 + x^3 y = 6$ en un punto (x,y) de ella. En particular, en el punto (1,2):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3(1)^2(2)}{1^3 + 2(2)} = -\frac{6}{5}$$

Por lo que, la ecuación de la recta tangente a la curva en (1,2) se obtiene como sigue

$$y - 2 = -\frac{6}{5}(x - 1) \Leftrightarrow 5y - 10 = -6x + 6 \Leftrightarrow 6x + 5y - 16 = 0$$

Y la ecuación de la normal así:

$$y - 2 = \frac{5}{6}(x - 1) \Leftrightarrow 6y - 12 = 5x - 5 \Leftrightarrow 5x - 6y + 7 = 0$$

Ejemplo 8

Calcular $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $x^3 + y^3 = 1$

Solución

Derivando implícitamente dos veces la ecuación $x^3 + y^3 = 1$ respecto a x , se tiene:

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(1) \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{De donde: } \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx}\right) &= \frac{d}{dx}(0) \Rightarrow \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}\left(3y^2 \frac{dy}{dx}\right) = 0 \\ &\Rightarrow 6x + 3y^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) + 3 \frac{dy}{dx} \left(\frac{d}{dx}y^2\right) = 0 \\ &\Rightarrow 6x + 3y^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} \left(2y \frac{dy}{dx}\right) = 0 \\ &\Rightarrow 6x + 3y^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 6y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{De donde, } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6x}{3y^2}. \text{ Pero } \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}, \text{ entonces}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6y\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)^2 + 6x}{3y^2} = \frac{2x^4 - 2xy^3}{y^5}$$

**Ejercicios 5.5**

En los ejercicios del 1 al 12, calcule $\frac{dy}{dx}$

1. $x^2 + y^2 = 9$

2. $xy + \cos y = \sin xy$

3. $x - y = \sin xy$

4. $xy = \sin \sqrt{x+y}$

5. $x^2 + xy^2 = x + y^2$

6. $y^{2/3} + \frac{x^3}{3} = \sqrt[3]{xy^4}$

7. $y = \begin{cases} -\sqrt{x \sin x} & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x \sin x} & \text{si } 0 < x \leq \pi \end{cases}$

8. $y^2 = \begin{cases} 4x^2 - x^4 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 2x^3 - x^4 & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$

9. $y^2 = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

10. $y\sqrt{1-x} + x\sqrt{y-1} = 2x^2y$

11. $\frac{x}{x-y} = y^2 + 3$

12. $x^{2/3} - y^{2/3} = 1$

En los ejercicios del 13 al 18, calcule $\frac{dy}{dx}$ explícita e implícitamente en el punto que se indica.

13. $x^2y + y^2 = 4$, (0,2)

14. $xy = 2$, (1,2)

15. $x = \operatorname{arcsec} e^{\sqrt{y-1}}$, (0,1)

$$16. (x^2 + y^2)^2 = 4xy^2, (1,1) \quad 17. y^2 = \begin{cases} -x & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}, (1,1) \quad 18. x^2 - y^2 = xy + 1, (1,0)$$

Del 19 al 30, encuentre las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva dada en el punto que se indica

19. $y^2 = 2x + 2x^2$, (1,-2)

20. $x^2 + xy^3 = 9$, (1,2)

21. $y^2x^2 + x^3 = 4$, (-2, $\sqrt{3}$)

22. $x^3y - x^2 - y = 0$, (0,0)

23. $y^2 - x \operatorname{sen} x = 0$, (π ,0)

24. $x = \operatorname{arctan} e^{\sqrt{y+1}}$, ($\frac{\pi}{4}$, -1)

25. $(x-1)^2 - (2-y)^2 = 1$, (2,2)

26. $x^3 + y^3 = 7$, (2,-1)

27. $y^3 - 2xy = 4$, (1,2)

28. $\operatorname{sen} \frac{x}{y} = \frac{\pi}{x}$, (π ,2)

29. $\cos xy = \frac{\sqrt{2}}{2y}$, ($\frac{\pi}{4}$, 1)

30. $x = e^y$, (1,0)

31. Encuentre los puntos (x,y) de la curva $x^2y^2 + x^3 - 4 = 0$ para los cuales la tangente a la curva en ellos sea paralela a la recta $y = 1$

32. Demuestre que la recta tangente al círculo $x^2 + y^2 = a^2$ es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

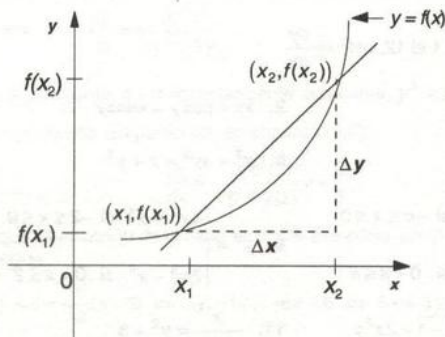
33. Demuestre que la recta normal a la curva $4x^2 - x^4 - y^2 = 0$ en el punto (2,0) pasa por el origen.

34. Demuestre que las tangentes en las intersecciones de las curvas
 $4y^2 + 4y - 8x + 1 = 0$, $2x^2 + 2y^2 = 1$
 son ortogonales (perpendiculares).

35. Si $y^2 - x \operatorname{sen} x = 0$, calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$ en el punto (π ,0).

5.6 Razón de cambio

Considérese una función $y = f(x)$



Si x cambia de x_1 a x_2 , entonces el cambio de x o *incremento* de x se denota Δx , se lee "delta x " y se define así

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio de y o *incremento* de y se denota Δy , se lee "delta y " y se define como

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

Al cociente de estos incrementos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

se le llama *razón de cambio media* de y respecto a x sobre el intervalo $[x_1, x_2]$. Nótese que

$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 + \Delta x$$

Por lo que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Decir que x cambia de x_1 a x_2 significa que $x = x_1$ se incrementa en Δx , o sea que $x + \Delta x = x_2$. Así que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

es otra forma de expresar la razón de cambio media de y respecto a x . Si la función f es diferenciable en x , la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se llama la *razón de cambio instantánea* de $y = f(x)$ respecto a x sobre el intervalo $[x, x + \Delta x]$. Precisando se dice que

Definición

1. La *razón media de cambio* de $y = f(x)$ respecto a x se denota $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y se define así

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. La *razón instantánea de cambio* de una función $y = f(x)$ diferenciable en x , es la derivada de y respecto a x

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Nota

En la mayoría de las aplicaciones de estos conceptos, las variables x y y son funciones de una variable común (el tiempo t). O sea

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

definidas ambas implícitamente por una ecuación. Derivando implícitamente ambos lados de dicha ecuación respecto al tiempo t , aparecen las razones de cambio instantáneas de x y de y respecto al tiempo t . A saber:

$$\frac{dx}{dt} \text{ y } \frac{dy}{dt}$$

llamadas cada una *rapidez de variación*.

En particular, si tanto x como y son funciones que dependen del tiempo t ; y si $y = f(x)$ es la ecuación que relaciona a x con y , entonces

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{df(x)}{dt} = \frac{d}{dt} f(x(t)) = \frac{d}{dt} (f \circ x)(t) = (f \circ x)'(t) = f'(x(t)) \cdot x'(t) \\ &= f'(x) \cdot x'(t) = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}\end{aligned}$$

O sea, por la regla de la cadena $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

Ejemplo 1

Supóngase que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta recorriendo $\sqrt{t}$ metros en t segundos.

- Hallar la trayectoria que describe el movimiento o desplazamiento de la partícula (ecuación de movimiento).
- Calcular la rapidez con que se mueve la partícula cuando $t = c$ segundos ($c > 0$).
- ¿En qué tiempo desarrolla la partícula una rapidez instantánea de $5 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$?

Solución

- a) Supóngase que y es la distancia recorrida en $x = t$ segundos. Entonces:

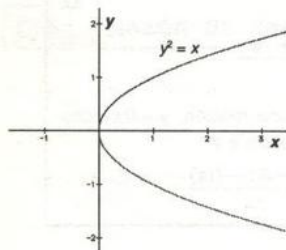
$$x = x(t) = t \quad (1)$$

$$y = y(t) = \sqrt{t} \quad (2)$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación (2) se tiene que

$$y^2 = t$$

Pero $x = t$, entonces $y^2 = x$ es la ecuación de movimiento. La gráfica de esta ecuación es la trayectoria que describe el movimiento de la partícula.



- b) La rapidez con que se mueve la partícula es

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

En particular si $t = c > 0$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \frac{\text{m}}{\text{seg}}$. En este caso $\frac{dy}{dt}$ es la rapidez instantánea de variación de la distancia recorrida (rapidez instantánea de movimiento) y $\frac{dx}{dt}$ es la rapidez instantánea de variación del tiempo.

- c) Supóngase que $\frac{dy}{dt} = 5$; entonces $\frac{1}{2y} = 5$, de donde $y = \frac{1}{10}$. O sea, $\sqrt{t} = \frac{1}{10}$. Por lo que $t = 0.01$. Es decir, en 0.01 seg, la partícula desarrolla una rapidez de $5 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$; o bien, se dice que en 0,01 seg la partícula se mueve a razón de $5 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$

Ejemplo 2

Un cultivo de bacterias crece de modo que su masa es $\frac{1}{2}t^2 + 2$ gramos después de t horas.

- ¿Cuál es su crecimiento en el intervalo $1 \leq x \leq 1.01$?
- ¿Cuál su crecimiento medio (promedio) en el intervalo $1 \leq x \leq 1.01$?
- ¿Con qué rapidez instantánea crece cuando $t = 3$ horas?

Solución

Supóngase que y es el crecimiento de la masa, y que x es el tiempo. O sea

$$x = x(t) = t$$

$$y = y(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2$$

Entonces:

- a) Tómese $a = 1$ y $b = 1.01$. El crecimiento en el intervalo

$$a = 1 \leq t \leq 1.01 = b,$$

se obtiene como sigue

$$\Delta y = y(b) - y(a) = y(1.01) - y(1) = \frac{1}{2}(1.01)^2 + 2 - \frac{1}{2}(1)^2 - 2 = 0.01005$$

O sea, la masa en el intervalo de 1 hora a 1.01 horas crece 0.01005 gramos.

- b) El crecimiento promedio en el intervalo $a = 1 \leq t \leq 1.01 = b$ se calcula así

$$\frac{\Delta y}{b-a} = \frac{y(b) - y(a)}{b-a} = \frac{0.01005}{0.01} = 1.005$$

O sea, la masa crece en promedio $1.005 \frac{\text{gramos}}{\text{hora}}$ a lo largo del intervalo $[a, b]$.

- c) La rapidez instantánea $\frac{dy}{dt}$ de crecimiento de masa se calcula así

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} t^2 + 2 \right) = t$$

En particular, $t = 3 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3 \frac{\text{gramos}}{\text{hora}}$

Ejemplo 3

Un avión vuela con velocidad constante de $720 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ y con una inclinación de 45° hacia arriba. Hallar la rapidez con que se aleja el avión de una torre de control 1 minuto después de haber estado perpendicularmente a ella 3 km arriba.

Solución

Si u y x denotan respectivamente la distancia entre el avión y la torre y la distancia recorrida por el avión, entonces por la ley de los cosenos

$$u^2 = 3^2 + x^2 - 2(3)(x) \cos 135^\circ$$

$$u^2 = 9 + x^2 + 3\sqrt{2}x \quad (*)$$

Cada minuto el avión recorre $\frac{720}{60} = 12 \frac{\text{km}}{\text{min}}$. Así que, si $x = 12$, entonces

$$u^2 = 9 + (12)^2 + 3\sqrt{2}(12) = 9 + 144 + 36\sqrt{2} = 153 + 36\sqrt{2}$$

De donde, $u = \sqrt{153 + 36\sqrt{2}}$. Derivando implícitamente la ecuación (*) respecto al tiempo t se tiene

$$2u \frac{du}{dt} = (2x + 3\sqrt{2}) \frac{dx}{dt} \text{ o sea } \frac{du}{dt} = \frac{2x + 3\sqrt{2}}{2u} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Sustituyendo en esta última relación, los valores

$$x = 12, u = \sqrt{153 + 36\sqrt{2}} \text{ y } \frac{dx}{dt} = 720,$$

se calcula la rapidez $\frac{du}{dt}$. Observe:

$$\frac{du}{dt} = \frac{2x + 3\sqrt{2}}{2u} \frac{dx}{dt} = \frac{2(12) + 3\sqrt{2}}{2\sqrt{153 + 36\sqrt{2}}} (720) = 712$$

Así que, la rapidez de cambio de la distancia del avión a la torre es

$$\frac{du}{dt} = 712 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

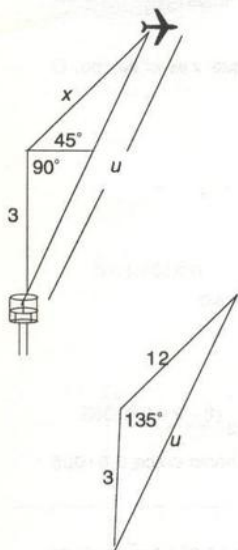
Es decir, 1 minuto después de estar encima de la torre, el avión se aleja de ella a razón de $712 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Recomendación

Para resolver problemas de razón de cambio (rapidez de variación relacionada); se hace esto:

1

Se interpreta gráficamente el problema (representación esquemática del problema).



2

A partir del esquema o dibujo, se encuentra la ecuación que relaciona las variables del problema.

3

Tomando en cuenta las condiciones del problema y el dibujo, se calcula el valor de las variables.

4

Se deriva implícitamente la ecuación del paso 2.

5

En el resultado del paso 4, se sustituye el valor de las variables y el de las razones de cambio conocidas.

(Nota: Los pasos 3 y 4 pueden permutar)

Ejemplo 4

Dos lanchas A y B parten de un punto C de un muelle a las 12:00 horas en dirección perpendicular una de la otra. Si la lancha A navega a $16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ y la lancha B a $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Hallar la rapidez de variación de la distancia entre ambas lanchas a las 12:30 horas.

Solución

Supóngase que x y y denotan respectivamente las distancias recorridas por las lanchas A y B. Además supóngase que z denota la distancia entre ambas lanchas. Entonces, por el teorema de Pitágoras

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Derivando implícitamente esta ecuación respecto al tiempo t , se tiene

$$2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$$

$$z \frac{dz}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \quad (*)$$

Por otra parte, de las 12:00 horas a las 12:30 horas hay $\frac{1}{2}$ hora de diferencia. En $\frac{1}{2}$ hora:

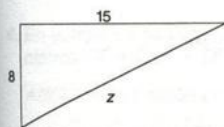
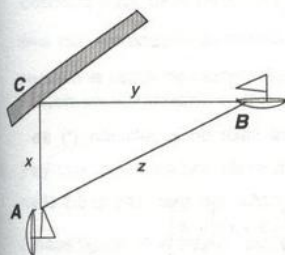
- La lancha A recorre $\frac{1}{2} \left(16 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right) = 8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$
- La lancha B recorre $\frac{1}{2} \left(30 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right) = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Entonces la distancia z entre las lanchas a las 12:30 horas se obtiene de nuevo con el teorema de Pitágoras, así

$$z^2 = 8^2 + 15^2 \Leftrightarrow z = \sqrt{289} = 17$$

O sea, $z = 17$ km. Así que, a las 12:30 horas $x = 8$, $y = 15$, $z = 17$. Además $\frac{dx}{dt} = 16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ y $\frac{dy}{dt} = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, entonces sustituyendo estos valores en la ecuación (*) se tiene

$$17 \frac{dz}{dt} = 8 \left(16 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right) + 15 \left(30 \frac{\text{km}}{\text{h}} \right)$$



$$17 \frac{dz}{dt} = 578 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

De donde, $\frac{dz}{dt} = 34 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. O sea a las 12:30 horas cada lancha se aleja una de la otra a razón de $34 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (rapidez de variación de las distancias entre ellas).

Ejemplo 5

Un silo en forma de cono circular recto almacena maíz y se está llenando a razón de $0.6 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$. El silo tiene 3 m de altura y 2 m de radio en la base. Calcular la rapidez con que el maíz sube de nivel, cuando éste tiene 1 m de profundidad.

Solución

Cuando sube el nivel, el maíz ocupa un espacio de forma de cono circular recto truncado de altura x y radios 2 y r metros. El volumen de un cono truncado de radios a y b , y altura h se obtiene con la fórmula

$$V = \frac{1}{3} \pi h (a^2 + b^2 + ab)$$

En particular si $a = r$, $b = 2$ y $h = x$, se tiene

$$V = \frac{1}{3} \pi x (r^2 + 2r + 4) \quad (*)$$

Por semejanza de triángulos se tiene que

$$\frac{3}{2} = \frac{3-x}{r}$$

De donde, $r = \frac{2}{3}(3-x)$. Sustituyendo este valor en la relación (*) se obtiene:

$$V = \frac{1}{3} \pi x \left(\left(\frac{2}{3}(3-x) \right)^2 + 2 \left(\frac{2}{3}(3-x) \right) + 4 \right)$$

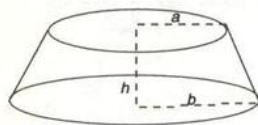
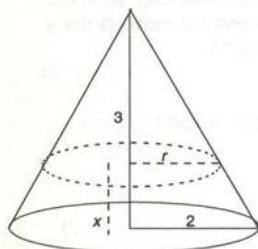
De donde: $V = \frac{\pi}{27} (4x^3 - 36x^2 + 108x)$. Diferenciando esto respecto al tiempo t se tiene que $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{27} (12x^2 - 72x + 108) \frac{dx}{dt}$. Por lo que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{27}{(12x^2 - 72x + 108)\pi} \cdot \frac{dV}{dt}$$

Como $\frac{dV}{dt} = 0.6 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$, y la profundidad es $x = 1$ m, entonces

$$\frac{dx}{dt} = \frac{27}{(12(1)^2 - 72(1) + 108)\pi} (0.6)$$

O sea, $\frac{dx}{dt} = 0.10743 \frac{\text{m}}{\text{h}}$



Nota

En este ejemplo, la rapidez con que aumenta x es la misma que la rapidez con que disminuye la altura $3 - x$ del cono de radio r excepto por el signo. O sea, si en lugar de llenar el silo, éste se vaciara, la razón con que disminuye la profundidad x sería $-0.10743 \frac{\text{m}}{\text{h}}$. Cabe mencionar que en este tipo de problemas no hay distinción entre rapidez y velocidad como razón de cambio; estrictamente, la rapidez es el valor absoluto de la velocidad. Tomando en cuenta este hecho, se prescinde del signo de la razón de cambio, a menos que en forma estricta se le quiera distinguir como positiva cuando aumenta y negativa cuando disminuye.

Ejercicios 5.6

1. Un halcón en vuelo se aleja de un árbol de 8 m de altura a razón de $5 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$. Si vuela horizontalmente a 128 m de altura, calcule la rapidez del vuelo cuando se ha alejado del árbol 30 m (fig. 1).

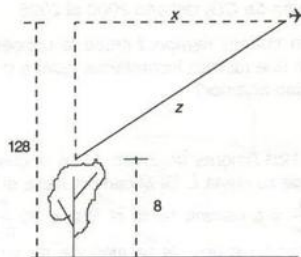


Fig. 1

2. PQRS es un rectángulo inscrito en un triángulo ABC isósceles cuya base mide 12 cm y su altura 24 cm. Si el área del rectángulo disminuye a razón de $4 \frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$, encuentre la razón de cambio de las dimensiones del rectángulo en el momento en que su área es 22 cm^2 (fig. 2).

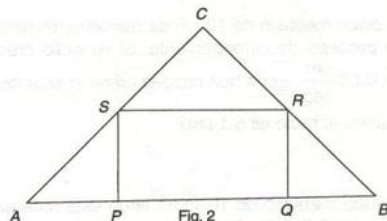


Fig. 2

3. Hay una lámpara a una altura de 3 m en un poste. Juan mide 1.5 m y se aleja del poste a una velocidad de $1 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ (véase fig. 3). Si él trae un piojo en el coco, y su distancia al pie de la perpendicular desde la lámpara y la longitud de su sombra miden cada una 2 m, entonces en ese momento:

- ¿A qué velocidad se mueve el punto en donde está el piojo?
- ¿Con qué rapidez crece la sombra de Juan?
- ¿Con qué rapidez se aleja del poste la punta de la sombra?

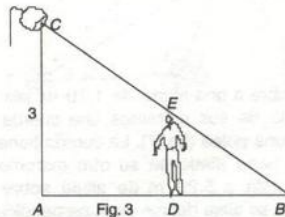


Fig. 3

4. En la figura 4 se tienen dos círculos tangentes de diámetros $DE = 10 \text{ cm}$ y $CE = 5 \text{ cm}$. Si el área del trapecio ABCD crece a razón de $2 \frac{\text{cm}^2}{\text{min}}$, ¿qué tan rápido crece su base mayor cuando su área es 18 cm^2 ?

5. Una escalera de 15 m de largo está recargada contra la pared de un edificio. La base de ella se desliza horizontalmente a razón de $3 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ (véase fig. 5). ¿Con qué rapidez

se mueve el punto de la escalera que dista 10 m de la base de ella cuando dicho punto está a 8 m del suelo?

6. Al inicio de 1990 el índice de CO_2 (dioxido de carbono) en la atmósfera de la Tierra fue de 345 partes por millón; o sea 0.0345 %. Supóngase que la concentración de CO_2 es $0.025t^2 + 345$ partes por millón después de t años del inicio en 1990.

- a) Calcule la razón media del crecimiento de la concentración de CO_2 del año 2000 al 2025.
b) ¿En cuánto tiempo t crece la concentración de CO_2 con una rapidez instantánea igual a la razón media del inciso anterior?

7. A las 12:17 horas un joven M se encuentra a 260 m al norte de su novia L . Si M camina hacia el Este a razón de $40 \frac{\text{m}}{\text{min}}$ y L camina hacia el Sur a $30 \frac{\text{m}}{\text{min}}$, encuentre la rapidez con la que M se aleja de su amada a las 12:20 horas.

8. Un disco metálico de 10 cm de diámetro, se dilata durante un proceso de calentamiento. Si su radio crece a razón de $0.05 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$, ¿con qué rapidez crece el área de sus caras cuando el radio es 5.1 cm?

9. Un tubo metálico de 10 m de largo está recargado contra una pared (fig. 6). Si su extremo inferior resbala sobre el piso a razón de $60 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$, ¿con qué rapidez decrece la altura del punto medio del tubo cuando su pie está a 8 m de la pared?

10. Un hombre a una altura de 1.70 m, jala horizontalmente por uno de sus extremos una cuerda que se desliza sobre una polea (fig. 7). La cuerda tiene una longitud de 5 m y tiene atado en su otro extremo un peso w . La polea está a 5.20 m de altura sobre el suelo. Si el hombre se aleja del pie de la perpendicular trazada de la

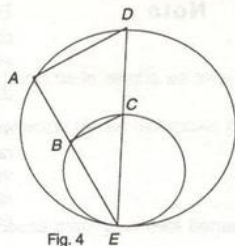


Fig. 4

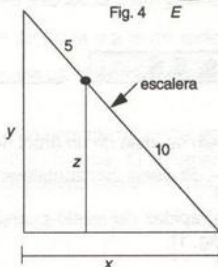


Fig. 5

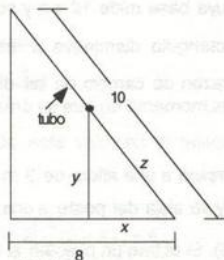


Fig. 6

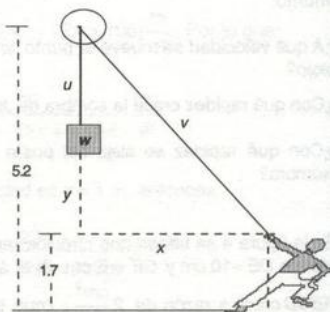


Fig. 7

polea al suelo a razón de $1 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$, ¿a razón de cuántos metros por segundo se eleva el peso del suelo?

11. Se tienen tres puntos fijos C , B y O , y dos círculos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ con centros en B y C respectivamente y radios variables de modo que ambos círculos sean tangentes a una recta trazada por O (fig. 8). Si $BC = OC = 10 \text{ cm}$ y si la distancia entre los puntos de tangencia varía a razón de $2 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$, ¿con qué rapidez varía el área del trapecio $ABCD$ cuando la distancia entre los puntos de tangencia es 8 cm ?

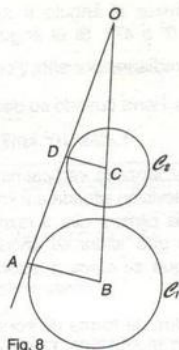


Fig. 8

12. Supóngase que el volumen V de un líquido contenido en una esfera es

$$V = \frac{\pi}{6} h (3x^2 + h^2)$$

en donde h es la profundidad del líquido, y x es el radio del disco determinado por el nivel del líquido (fig. 9). Si el agua contenida en un tanque esférico de 3 metros de radio, sale del tanque a razón de $250 \frac{\ell}{\text{min}}$; calcule la rapidez con que baja el nivel del agua cuando la profundidad es 2.5 m .

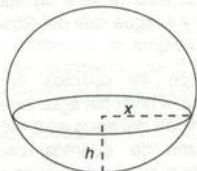


Fig. 9

13. El volumen V de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$. Determine el área S de la superficie de la esfera en donde S es la razón de cambio instantánea del volumen respecto al radio (fig. 10).

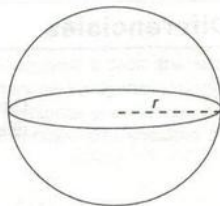


Fig. 10

14. La altura desde el suelo de una pelota que se deja caer desde una altura inicial de 122.5 m está dada por

$$s(t) = 122.5 - 4.9t^2$$

en donde s se mide en metros y t en segundos.

- ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando $t = \frac{1}{2}$?
- ¿En qué instante choca la pelota contra el suelo?
- ¿Qué velocidad lleva en ese instante?

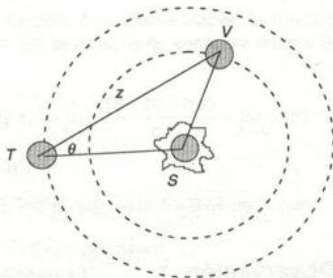


Fig. 11

15. La figura 11 muestra al Sol (S), a Venus (V) y a la Tierra (T) formando un triángulo en donde las distancias $TS = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$ y $VS = 1.023 \times 10^8 \text{ km}$ son constan-

tes. Considérese el ángulo θ con vértice en la Tierra variando de 0° a 47° . Si el ángulo θ crece a razón de $1.47 \times \frac{\pi}{180}$ radianes por año, ¿con qué rapidez se acerca Venus a la Tierra cuando su distancia a ella es

$$1.023 \times 10^8 \text{ km?}$$

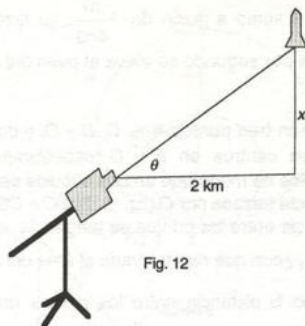


Fig. 12

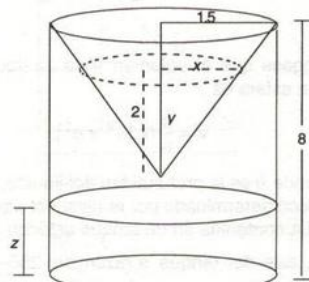


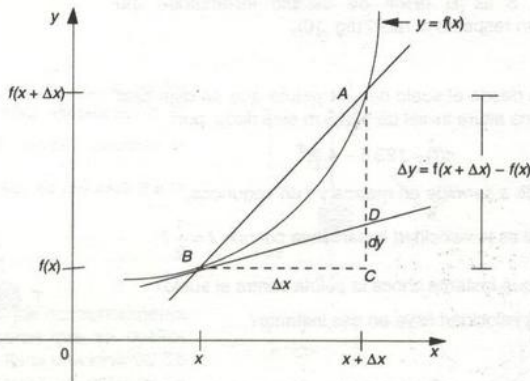
Fig. 13

16. Un cohete es lanzado verticalmente y seguido por una cámara de televisión situada a 2 km del punto de partida (fig. 12). Si la cámara gira a razón de 4.5 grados por segundo, ¿a qué altura se encuentra el cohete en el instante en que se eleva a razón de 100π metros por segundo?
17. Se tiene un filtro de forma de cono circular recto de 3 m de altura y 1.5 m de radio. El filtro está colocado dentro de un cilindro de 8 m de altura como se muestra en la figura 13. El filtro se llena de agua a razón de 80 litros por minuto y el agua sale del filtro a razón de 2 litros por minuto.
- ¿A razón de cuántos centímetros por minuto aumenta el nivel del agua en el filtro; cuando en él, la profundidad del agua es 2 metros?
 - ¿A razón de cuántos centímetros por minuto aumenta el nivel del agua en el cilindro?

5.7

Diferenciales

Considérese un punto $B = (x, y)$ sobre la gráfica de una función $y = f(x)$ diferenciable.



Observación 1

La pendiente $m_{\tan}$ de la tangente a la gráfica de la función f en el punto $B(x, f(x))$ es

$$m_{\tan} = f'(x)$$

Pero también $m_{\tan} = \frac{CD}{\Delta x}$; por lo que $\frac{CD}{\Delta x} = f'(x)$, de donde

$$CD = f'(x) \cdot \Delta x$$

Definición 1

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en x y Δx un incremento en x

1. La *diferencial de x* se denota dx y se define como $dx = \Delta x$

2. La *diferencial de y* se denota dy y se define como

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = f'(x)dx$$

Observación 2

En la gráfica anterior se observa que:

Si el incremento Δx se hace pequeño, entonces la longitud Δy del segmento AC se aproxima a la longitud dy del segmento CD . O sea, $\Delta y = dy$ cuando $\Delta x = 0$ (el símbolo = se lee "aproximadamente igual a"). Es decir:

Definición 2

Cuando $\Delta x = 0$, se tiene que

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x$$

O bien:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

Comentario

En la discusión anterior, la notación $\Delta x = 0$ equivale a decir que Δx se hace pequeño y ello significa que $\Delta x \rightarrow 0$. Entonces las aproximaciones de la definición anterior se pueden establecer mediante el concepto de límite. Para ello hágase $\Delta x = h$ y considérese una función diferenciable $y = f(x)$ y una función φ definida como sigue:

$$\varphi(x, h) = \begin{cases} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

Para cada valor fijo x en donde la función f es diferenciable, la función $\varphi = \varphi(x, h)$ depende sólo de $h = \Delta x$. En tal caso, φ es continua en $h = 0$; porque

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(x, h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} f'(x) \\ &= f'(x) - f'(x) = 0 = \varphi(x, 0) \end{aligned}$$

O sea, $\varphi(x, h) = 0$ cuando $h = \Delta x = 0$. Por lo que, para $h = 0$ se tiene que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = \varphi(x, h) = 0$$

Multiplicando esto por h se obtiene:



$$f(x+h) - f(x) - f'(x) \cdot h = 0$$

De donde, $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \cdot \Delta x$. O sea, $\Delta y = dy$

Ejemplo 1

Considérese $y = f(x) = x^2 - 4x$. Compárese Δy con dy cuando x cambia de 2 a 2.03.

Solución

En este caso $x = 2$ y $\Delta x = 2.03 - 2 = 0.03$, entonces:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = f(2.03) - f(2) = (2.03)^2 - 4(2.03) - 2^2 + 4(2) \\ &= 4.1209 - 8.12 - 4 + 8 = 0.0009\end{aligned}$$

Como $f'(x) = 2x - 4$, entonces

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = f'(2) \cdot (0.03) = (0)(0.03) = 0$$

Nótese que $\Delta y = dy$. En este caso dy coincide con Δy hasta la tercera cifra decimal.

Ejemplo 2

Con diferenciales aproximar $\sqrt{50}$

Solución

Considérese la función $y = f(x) = \sqrt{x}$. Entonces $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Tómese x como la potencia cuadrada de base entera más próxima a 50. En este caso $x = 7^2 = 49$. Entonces $\Delta x = 50 - x = 50 - 49 = 1$, por lo que

$$\begin{aligned}\sqrt{50} &= \sqrt{49 + 1} = f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x \\ &= f(49) + f'(49) \cdot (1) \\ &= \sqrt{49} + \frac{1}{2\sqrt{49}} \cdot (1) \\ &= 7 + \frac{1}{14} \approx 7.0714286\end{aligned}$$

Este resultado coincide hasta la cuarta cifra significativa del valor real $\sqrt{50} = 7.0710678...$

Ejemplo 3

Aproximar por diferenciales $\sin 29^\circ$

Solución

Considérese la función $y = f(x) = \sin x$. Entonces $f'(x) = \cos x$. Por lo que

$$\begin{aligned}\sin 29^\circ &= \sin(30^\circ - 1^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \left(-\frac{\pi}{180}\right)\right) \\ x &= \frac{\pi}{6} \quad \uparrow \\ \Delta x &= -\frac{\pi}{180} \quad \uparrow \\ &= f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x \\ &= \sin \frac{\pi}{6} + \left(\cos \frac{\pi}{6}\right) \left(-\frac{\pi}{180}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\pi}{180}\right)\end{aligned}$$

$$= 0.5 - 0.0151149 = 0.4848851$$

Este resultado coincide hasta la cuarta cifra significativa del valor $\sin 29^\circ = 0.4848096$.

Las diferenciales también se usan en la estimación de errores en las mediciones.

Definición 3

Sea x una medida

$$1. \text{ Error máximo de medición} = x - \bar{x} = \Delta x$$

medida real $\xrightarrow{\quad}$ x
medida aproximada $\xrightarrow{\quad}$ $\bar{x}$

$$2. \text{ Error relativo} = \frac{\Delta x}{x}$$

$$3. \text{ Error porcentual} = \left(\frac{\Delta x}{x} \right) (100\%)$$

Ejemplo 4

El radio de un cilindro metálico mide 3 cm con un error máximo igual a 0.02 cm. Si el cilindro mide 10 cm de largo; entonces:

- Estimar el error máximo que se comete al calcular el volumen del cilindro
- Estimar los errores relativo y porcentual del volumen del cilindro.

Solución

El volumen V de un cilindro de radio r y altura h se calcula con la fórmula

$$V = \pi r^2 h$$

Considerando $V = V(r)$, se tiene:

$$a) \Delta V = dV = V'(r)dr = (2\pi rh)dr$$

En este caso $r = 3$ cm, $h = 10$ cm y $dr = \Delta r = \pm 0.02$ cm, por lo que

$$dV = 2\pi(3)(10)(\pm 0.02) = \pm 1.2\pi = \pm 3.7699$$

O sea, el error máximo ΔV que se comete en el cálculo del volumen es aproximadamente igual a ± 3.7699 cm³.

- Como $r = 3$ cm y $h = 10$ cm, entonces

$$V = \pi r^2 h = \pi(3)^2(10) = 90\pi \text{ cm}^3$$

Como además $\Delta V = dV = \pm 1.2\pi$ cm³, entonces:

$$\text{Error relativo} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\pm 1.2\pi}{90\pi} = \pm 0.013$$

$$\text{Error porcentual} = \left(\frac{\Delta V}{V} \right) (100\%) = (\pm 0.013)(100\%) = \pm 1.3\%$$

Ejercicios 5.7

En los ejercicios del 1 al 12, calcule la diferencial dy

1. $y = x^3 - 3x$

2. $y = \sqrt[3]{1-x^2}$

3. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

4. $y = x^2(1+x)^3$

5. $y = \frac{x^3+4}{x^2}$

6. $y = \frac{1}{x^2+1}$

7. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

8. $y = 2\sin x \cos x$

9. $y = x\sin\sqrt{1+x}$

10. $y = x\sin x - \cos x$

11. $y = \frac{x}{1+x}$

12. $y = \frac{1+\cos x}{x}$

Del 13 al 24, calcule el incremento Δy , la diferencial dy y la diferencia $(dy - \Delta y)$

13. $y = 3x$

14. $y = 9 - x$

15. $y = x^2$

16. $y = x^{1/2}$

17. $y = x^{-2}$

18. $y = \sin x$

19. $y = (x+3)^2$

20. $y = \frac{1}{x}$

21. $y = x^2 - x$

22. $y = |x|$

23. $y = \ln x$

24. $y = xe^x$

Del 25 al 36, aproximar con diferenciales la operación que se indica.

25. $\sqrt{102}$

26. $\sqrt[3]{26}$

27. $\sqrt[5]{31}$

28. $\sqrt[6]{65}$

29. $(0.994)^5$

30. $\sqrt[4]{255} - 3\sqrt{37}$

31. $\cos 46^\circ + 2\sin 29^\circ$

32. $\tan 44^\circ - \frac{\cos 61^\circ}{\sec 46^\circ}$

33. $\tan^2 31^\circ - 2\sec^2 44^\circ$

34. $\sqrt{\tan 46^\circ} - 3\sin 59^\circ$

35. $\sqrt[3]{\sec 31^\circ}$

36. $\ln(e+1)$

Del 37 al 40, aproxime con diferenciales el incremento Δy de $y = f(x)$ cuando $a \leq x \leq b$

37. $f(x) = 4x^5 - 3x^3 + 2$, $1 \leq x \leq 1.5$

38. $f(x) = -4x^3 + 2x - 3$, $2 \leq x \leq 2.3$

39. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 3$, $0 \leq x \leq 0.09$

40. $f(x) = \frac{1}{x}$, $-1 \leq x \leq -0.5$

41. Aproxime por diferenciales el incremento del volumen de un cubo cuya arista cambia de 5 a 5.01 cm.

42. Aproxime el incremento del área de un globo esférico cuando su radio cambia de 12 a 12.6 cm.

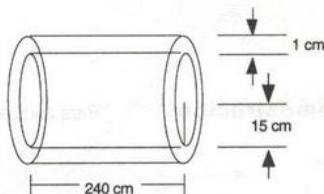
43. La arista de un cubo mide 10 cm con un error máximo de medición igual a 0.2 cm. Aproxime los errores relativo y porcentual del volumen del cubo.

44. La fuerza F_c que debe aplicarse hacia dentro para mantener un cuerpo moviéndose en un círculo se llama *fuerza centrípeta* y está dada como $F_c = \frac{mv^2}{r}$ en donde r es el radio del círculo, m y v son

respectivamente la masa y la velocidad constante del cuerpo. Use diferenciales para estimar el incremento del radio correspondiente a un aumento de 0.5 N en la fuerza centrípeta para mantener en movimiento circular una piedra de 0.1 kg a una velocidad de 2 m/seg cuando el radio mide 1 m.

45. Considere una fuerza F que actúa sobre una superficie de área A . Esta acción determina una presión p definida como $p = \frac{F}{A}$. Use diferenciales y el hecho de que $F = ma$ en donde m es la masa y $a = 98 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$, para estimar cuántos kilogramos debe perder de masa un avión con 20 000 kg de ella volando en un plano horizontal para que la presión entre la superficie superior e inferior de sus alas las cuales tienen un área de 60 m² disminuya 200 N/m².

46. Un tronco de pino tiene forma cilíndrica, 2.4 m de largo y 15 cm de radio interior (sin la corteza). Aproxime por diferenciales el peso de la corteza del tronco si el espesor de ella es 1 cm y el peso aproximado del tronco es w kilogramos por metro cúbico.



47. Un bioquímico industrial encontró que si se aplica a una persona x unidades de una droga por día, la presión arterial de ella se mantiene en $P(x) = \frac{100x + 240}{x + 2}$ milímetros de mercurio. Aproxime por diferenciales el cambio de presión que experimenta la persona cuando la dosis diaria se reduce de 2 a 1.5 unidades.

5.8

Método de Newton

En esta sección se establecerá un procedimiento que permite aproximar las raíces de una ecuación de la forma $f(x) = 0$, en donde f es una función diferenciable. Para ello se establecerá primeramente la siguiente proposición la cual proporciona una técnica para aproximar raíces de ecuaciones de la forma mencionada.

Proposición 1

Supóngase que f es una función tal que

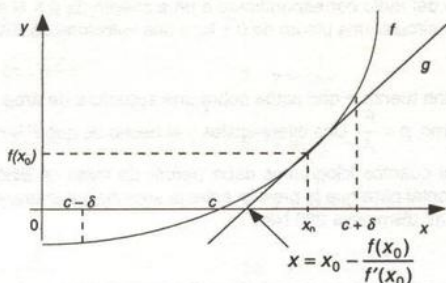
1. $f(c) = 0$ para algún número c
2. f es diferenciable en $]c - \delta, c + \delta[$ para algún $\delta > 0$.
3. $f'(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$ en $]c - \delta, c + \delta[$

Entonces

$$c \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

para todo $x_0 \neq c$ en $]c - \delta, c + \delta[$

Nota: Cuanto más pequeño es δ , la aproximación es mejor.



Demostración

Para cada $x_0 \neq c$ en $]c - \delta, c + \delta[$ considérese una función g definida así

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Por una parte:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0) \\ &= f'(x_0) - f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

Por otra parte: $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \Rightarrow$

$$g(x)(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

Pero: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)(x - x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0 \cdot 0 = 0$

O sea, $g(x)(x - x_0) = 0$ cuando $x = x_0$. Entonces, si el número $\delta > 0$ es suficientemente pequeño, para cada $x \neq x_0$ en $]c - \delta, c + \delta[$ se tiene

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x) + f'(x_0)x_0 = 0$$

En particular para $x = c$ se tiene que $f(c) - f(x_0) - f'(x_0)(c) + f'(x_0)x_0 = 0$

Pero $f(c) = 0$, entonces $-f(x_0) - f'(x_0)(c) + f'(x_0)x_0 = 0$. De donde, por ser $f'(x_0) \neq 0$ se obtiene que

$$c = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

□

Comentario

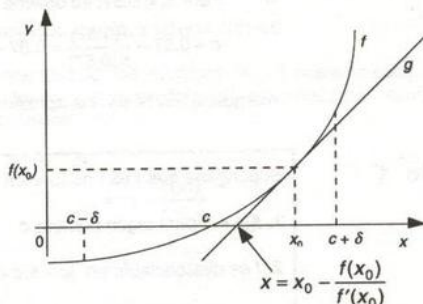
En la demostración anterior fue visto que, si el número $\delta > 0$ es suficientemente pequeño, para cada $x \neq x_0$ en $]c - \delta, c + \delta[$ se tiene

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

De donde: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. O bien, $f(x) = g(x)$ en donde

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

define una función $y = g(x)$ cuya gráfica es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$.



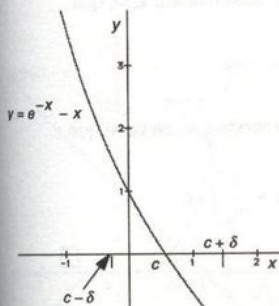
La aproximación $x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ geoméricamente es la intersección de la recta tangente g en el punto $(x_0, f(x_0))$ con el eje x . Dicha tangente se obtiene resolviendo la ecuación $g(x) = 0$ como se muestra enseguida.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x) - f'(x_0)(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)(x) = f'(x_0)(x_0) - f(x_0) \Leftrightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Ejemplo 1

Solución



Resolver la ecuación $e^{-x} - x = 0$ aplicando la proposición 1.

Considérese la función $f(x) = e^{-x} - x$. Nótese que

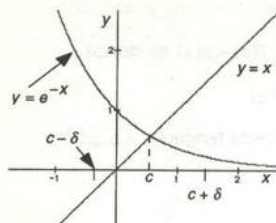
$$f(0) = e^{-0} - 0 = e^0 - 0 = 1 - 0 = 1$$

$$f(1) = e^{-1} - 1 = 0.3678794 - 1 = -0.6321206$$

Así que, $f(1) < 0 < f(0)$. Entonces por el teorema del valor intermedio, existe c en $]0, 1[$ tal que $f(c) = 0$. A partir del trazo aproximado de la gráfica de f o de la intersección de la gráfica de $y = e^{-x}$ con la de $y = x$ ($e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = x$), se verifica la existencia de un número $\delta > 0$ tal que f es diferenciable en $]c - \delta, c + \delta[$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \neq 0$ en $]c - \delta, c + \delta[$. Entonces por la proposición 1,

$$c = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

para todo $x_0 \neq c$ en $]c - \delta, c + \delta[$. Para aproximar c , se da a x_0 dos o tres valores comenzando con $x_0 = 1$ o con $x_0 = 0$ extremos del intervalo $]0, 1[$



- Para $x_0 = 1$, con calculadora se obtiene

$$c \approx 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{0.6321206}{1.3678794} \approx 0.537 \approx 0.54$$

- Para $x_0 = 0.54$, se obtiene:

$$c \approx 0.54 - \frac{f(0.54)}{f'(0.54)} = 0.54 - \frac{0.0427482}{1.5827482} \approx 0.567 \approx 0.57$$

- Para $x_0 = 0.57$, se obtiene

$$c \approx 0.57 - \frac{f(0.57)}{f'(0.57)} = 0.57 - \frac{0.0044745613}{1.5655254} \approx 0.5671418$$

Así que, 0.56714 es una aproximación de la raíz c de $e^{-x} - x = 0$

Corolario 1

Supóngase que f es una función tal que

1. $f(c) = 0$ para algún número c
2. f es diferenciable en $]c - \delta, c + \delta[$ para algún $\delta > 0$
3. $f'(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$ en $]c - \delta, c + \delta[$

Entonces existe una sucesión $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ de números en $]c - \delta, c + \delta[$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$$

Demostración

Por la propiedad arquimediana, existe una sucesión creciente

$$m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_n < \dots$$

de números enteros positivos tales que

$$0 < \dots < \frac{1}{m_{n+1}} < \frac{1}{m_n} < \frac{1}{m_{n-1}} < \dots < \frac{1}{m_2} < \frac{1}{m_1} < \delta$$

Además, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m_n} = 0$. Por la proposición 1, para cada n existe x_n tal que

$$c - \delta < c - \frac{1}{m_n} \leq x_n \leq c + \frac{1}{m_n} < c + \delta,$$

con $x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = c$. Pasando al límite cuando n tiende a ∞ , se tiene que

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(c - \frac{1}{m_n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(c + \frac{1}{m_n} \right) = c$$

De donde $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$

□

Nota: Este último límite indica que cuando n aumenta más y más, el número x_n se acerca más y más al número c .

La proposición 1 es la base de una técnica de aproximación de raíces de ecuaciones de la forma $f(x) = 0$, llamada *método de Newton* o *método de Newton-Raphson*; el cual consiste en encontrar por tanteos o a partir del trazo aproximado de la gráfica de f , dos números a y b preferentemente enteros consecutivos tales que

1

$$f(a) < 0 < f(b) \text{ o } f(b) < 0 < f(a)$$

2

f es diferenciable en $]a, b[$

3

$$f'(x) \neq 0 \text{ para todo } x \text{ en }]a, b[\text{ tal que } f(x) \neq 0$$

Habiendo encontrado los números a y b mencionados, se toma un número x_1 en $]a, b[$ a partir del cual se construye recursivamente la siguiente sucesión

$$\begin{aligned} x_1 \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \\ x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \\ &\vdots \end{aligned}$$

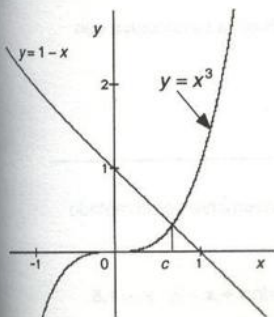
Cada número x_n de la sucesión es una aproximación de un número c en $]a, b[$ tal que $f(c) = 0$. Cada vez que n aumenta, el valor x_n se acerca más y más al número c , lo cual se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$$

Ejemplo 2

Encontrar la intersección de las gráficas de las funciones $y = x^3$ y $y = 1 - x$

Solución



Igualando las y , se tiene

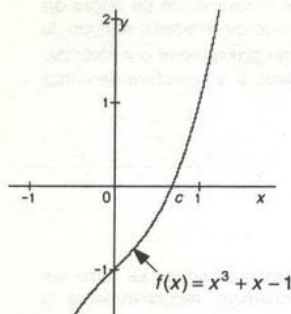
$$x^3 = 1 - x \Leftrightarrow x^3 + x - 1 = 0$$

Considerando la gráfica de $f(x) = x^3 + x - 1$, se observa que existe un número c en $]0, 1[$ tal que $f(c) = 0$; el cual se aproxima por el método de Newton como sigue:

- Se deriva $f: f'(x) = 3x^2 + 1$
- Se elige x_1 en $]0, 1[$ lo más cercano posible de c y se calculan tres o más números de la sucesión $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ involucrados en dicho método, así

$$x_1 = 0.6$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.6 + \frac{0.184}{2.08} \approx 0.6884615 \approx 0.69$$



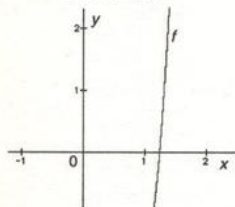
(Nota: Para simplificar los cálculos se redondea a centésimos 0.6884615 lo cual resulta 0.69)

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.69 - \frac{0.018509}{2.4283} \approx 0.6823778 \approx 0.682$$

Al calcular $x_4 = 0.682 - \frac{f(0.682)}{f'(0.682)}$ se observa que sus primeras cuatro cifras decimales coinciden con las de x_3 , por lo que 0.6823 es una aproximación de la raíz c de $x^3 + x - 1 = 0$ la cual es la abscisa del punto de intersección (c, c^3) o $(c, 1 - c)$ que se busca.

Ejemplo 3

Solución



Calcular $\sqrt[5]{3}$

Supóngase que $\sqrt[5]{3} = x$. Entonces

$$\sqrt[5]{3} = x \Leftrightarrow (\sqrt[5]{3})^5 = x^5 \Leftrightarrow 3 = x^5 \Leftrightarrow x^5 - 3 = 0$$

Considérese $f(x) = x^5 - 3$. Entonces $f'(x) = 5x^4$. Enseguida por el método de Newton se calculan x_2 , x_3 y x_4 a partir de $x_1 = 1.2$.

$$x_1 = 1.2$$

$$x_2 = 1.2 - \frac{f(1.2)}{f'(1.2)} = 1.2 - \frac{0.51168}{10.368} \approx 1.2493519 \approx 1.25$$

$$x_3 = 1.25 - \frac{f(1.25)}{f'(1.25)} = 1.25 - \frac{0.0517578}{12.207031} \approx 1.24573 \approx 1.246$$

$$x_4 = 1.246 - \frac{f(1.246)}{f'(1.246)} \approx 1.246 - \frac{0.0032411891}{12.05153} \approx 1.2457311$$

Como x_3 y x_4 coinciden hasta la sexta cifra significativa se concluye que

$$\sqrt[5]{3} \approx 1.24573$$

Ejercicios 5.8

En los ejercicios del 1 al 5, cada ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz la cual debe aproximarse por el método de Newton con el cálculo de x_4 a partir del valor x_1 que se indica.

1. $f(x) = x^7 + x - 1$, $x_1 = 0.7$

2. $f(x) = x^6 - x - 1$, $x_1 = 1.1$

3. $f(x) = \ln x + x - 2$, $x_1 = 1.5$

4. $f(x) = \cos x - x$, $x_1 = 0.7$

5. $f(x) = \ln x + x$, $x_1 = 0.5$

En los ejercicios del 6 al 10, aplicando la proposición 1 calcule la raíz c de cada ecuación en el intervalo que se indica

6. $x^3 - x - 1 = 0$, $[1, 2]$

7. $e^x = x^2$, $[-1, 0]$

8. $\cot x + x = 0$, $[2, 3]$

9. $\operatorname{sen} x - x - 1 = 0$, $[-2, -1]$

10. $\cot x - x = 0$, $[0, 1]$

En los ejercicios del 11 al 15, con el método de Newton calcule cada raíz con exactitud hasta los cienmilésimos.

11. $\sqrt[3]{10}$

12. $\sqrt[4]{7}$

13. $\sqrt[5]{5}$

14. $\sqrt[3]{-2}$

15. $\sqrt[4]{50}$

En los ejercicios del 16 al 30, grafique las funciones dadas y encuentre las abscisas de los puntos de intersección de sus gráficas.

16. $y = x^6$, $y = 1 - x$

17. $y = x^7$, $y = x + 1$

18. $y = \cos x$, $y = x$

19. $y = \ln x^2$, $y = -x$

20. $y = \arctan x$, $y = 1 - x^2$

21. $y = e^x$, $y = 2x$

22. $y = \operatorname{sen} x$, $y = 1 - x$

23. $y = e^x - 3x$, $y = 0$

24. $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = 1 - x^2$

25. $y = x^7 + x + 1$, $y = 0$

26. $y = e^x$, $y = x^3$

27. $y = x^5$, $y = x + 1$

28. $y = x^3$, $y = 1 - x$

29. $y = x^4$, $y = x + 1$

30. $y = x^5$, $y = 1 - x$

6 APLICACIONES DE LA DERIVADA

6.0 Introducción

En el capítulo 5 se interpretó la derivada como la velocidad de una partícula y como la pendiente de la recta tangente a una curva; además se aplicó la derivada como razón de cambio en múltiples fenómenos de nuestro entorno. En este capítulo se estudiarán otras aplicaciones de la derivada así como la teoría básica para dichas aplicaciones.

6.1 Máximos y mínimos

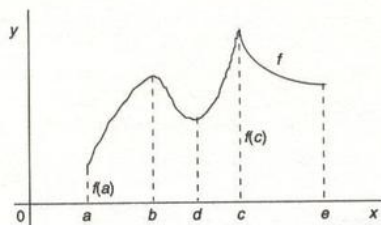
Entre las aplicaciones importantes del cálculo diferencial destacan los problemas de optimización los cuales requieren de los conceptos de máximo y mínimo de una función.

Definición 1

1. Una función f tiene un *máximo absoluto* en c si $f(x) \leq f(c)$ para todo x en el $\mathcal{D}_f$. En tal caso al número $f(c)$ se le llama *valor máximo* de f en el $\mathcal{D}_f$.
2. Una función f tiene un *mínimo absoluto* en c si $f(x) \geq f(c)$ para todo x en el $\mathcal{D}_f$. En este caso al número $f(c)$ se le llama *valor mínimo* de f en el $\mathcal{D}_f$.

Ejemplo 1

La figura que sigue muestra la gráfica de una función f definida en un intervalo cerrado $[a, e]$. En ella se observa que f tiene un máximo absoluto en c y un mínimo absoluto en a .



O sea en $[a, e]$, $f(c)$ es el valor máximo absoluto y $f(a)$ es el valor mínimo absoluto de f .

Definición 2

1. Una función f tiene un *máximo local* o *relativo* en c , si existe un número $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(c)$$

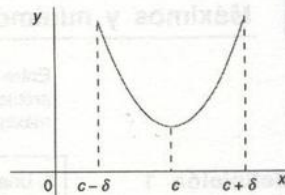
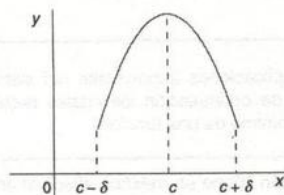
para todo x en $]c - \delta, c + \delta[$ y en el $\mathcal{D}_f$,

2. Una función f tiene un *mínimo local* o *relativo* en c , si existe un número $\delta > 0$ tal que

$$f(x) \geq f(c)$$

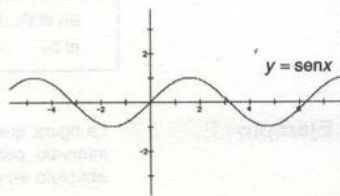
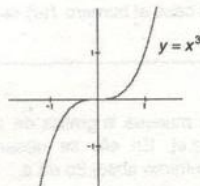
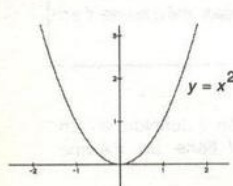
para todo x en $]c - \delta, c + \delta[$ y en el $\mathcal{D}_f$,

3. Los valores máximos y mínimos locales de una función f se llaman *valores extremos* de la función.



Ejemplo 2

La función f definida por $f(x) = x^2$ tiene un mínimo absoluto y local en $x = 0$. No tiene máximo absoluto ni local.



Ejemplo 3

La función f definida como $f(x) = x^3$ no tiene máximos ni mínimos.

Ejemplo 4

La función f dada por $f(x) = \sin x$ tiene un máximo absoluto y local en $x = (-1)^n(2n+1)\frac{\pi}{2}$ para cualquier entero $n = 0, 1, 2, \dots$ y tiene un mínimo absoluto y local en $x = (-1)^n(2n-1)\frac{\pi}{2}$ para $n = 0, -1, -2, \dots$

Enseguida se enuncia un teorema que garantiza la existencia de valores extremos de una función. Su demostración se omite por requerir conceptos de cálculo avanzado.

Teorema 1

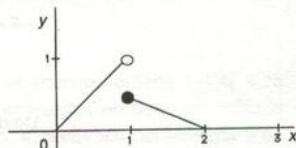
Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene un máximo y un mínimo en $[a, b]$

Si se elimina alguna de las hipótesis, el teorema falla.

Ejemplo 5

Considérese la función

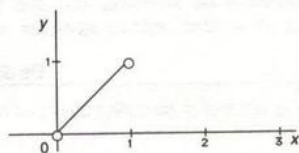
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{x}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



Esta función está definida en el intervalo cerrado $[0, 2]$ y no tiene máximo. Esto no contradice el teorema 1, porque f no satisface ser continua en $[0, 2]$. En efecto f es discontinua en $x = 1$.

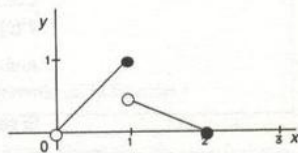
Ejemplo 6

La función $f(x) = x$ con $0 < x < 1$, es continua en $]0, 1[$; pero no tiene máximo ni mínimo. Esto no contradice el teorema 1 porque el intervalo $]0, 1[$ no es cerrado.

**Ejemplo 7**

Considérese la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 - \frac{x}{2} & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



Esta función tiene máximo y mínimo absolutos en $[0, 2]$ sin ser este intervalo cerrado y sin ser f continua en $[0, 2]$. Por lo que el recíproco del teorema 1 es falso.

Teorema 2

Supóngase que:

1. f tiene un máximo local o un mínimo local en c

2. f está definida en un intervalo abierto que contiene a c .

3. $f'(c)$ existe

Entonces, $f'(c) = 0$

Demostración

Supóngase que f tiene un máximo local en c . Como además f está definida en un intervalo abierto que contiene a c , entonces existe un número $\delta > 0$ tal que el intervalo abierto $]c - \delta, c + \delta[$ está contenido en el $\mathcal{D}_f$ y

$$f(x) \leq f(c)$$

para todo x en $]c - \delta, c + \delta[$. Se demostrará que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \text{ y } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

para concluir que, $f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0$.

- Para la primera desigualdad, como h tiende a 0^- , h es tal que

$$-\delta < h < 0 \Rightarrow c - \delta < c + h < c \Rightarrow c + h \in]c - \delta, c + \delta[$$

$$\Rightarrow f(c+h) \leq f(c) \Rightarrow f(c+h) - f(c) \leq 0 \Rightarrow \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

De donde por el teorema 2 de la sección 4.3 se sigue que

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

- Para la segunda desigualdad, como h tiende a 0^+ , h es tal que

$$0 < h < \delta \Rightarrow c < c + h < c + \delta \Rightarrow c + h \in]c - \delta, c + \delta[$$

$$\Rightarrow f(c+h) \leq f(c) \Rightarrow f(c+h) - f(c) \leq 0 \Rightarrow \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

De donde por el teorema 2 de la sección 4.3 se sigue que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

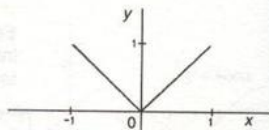
Como $f'(c)$ existe, los límites laterales deben ser iguales entre sí y con $f'(c)$. Por lo que $f'(c) = 0$.

Análogamente se demuestra que $f'(c) = 0$ si f tiene un mínimo local en c . □

Si se elimina alguna de las hipótesis, el teorema anterior falla.

Ejemplo 8

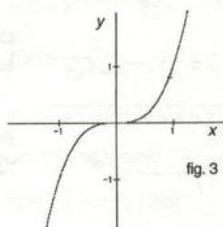
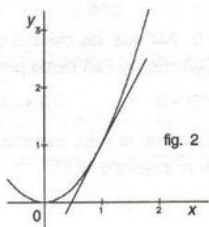
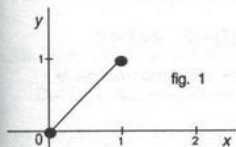
La función $f(x) = |x|$ tiene un mínimo local y absoluto en $x = 0$, está definida en el intervalo abierto $] -1, 1[$ que contiene al cero; sin embargo, $f'(0)$ no existe; por lo que, no se puede concluir por el teorema 2 que $f'(0) = 0$



Ejemplo 9

La función $f(x) = x$ definida en $0 \leq x \leq 1$ tiene un máximo absoluto en $x = 1$; además $f'(1)$ existe, pero f no está definida en un intervalo abierto

que contenga al 1; por lo que, no se puede concluir por el teorema 2 que $f'(1) = 0$ (véase fig. 1).



Ejemplo 10

La función $f(x) = x^2$ está definida en el intervalo abierto $]0,2[$ que contiene al 1, además $f'(1)$ existe, pero f no tiene un valor extremo en 1; por lo que, no se puede concluir por el teorema 2 que $f'(1) = 0$ (véase fig. 2).

Ejemplo 11

La función $f(x) = x^3$ está definida en el intervalo abierto $]-1,1[$ que contiene al cero; además $f'(0) = 0$. Sin embargo f no tiene un máximo local ni mínimo local en $x = 0$; por lo que, el recíproco del teorema 2 es falso.

Este último ejemplo exhibe el hecho de que $f'(c) = 0$ no es suficiente para que en c la función f tenga un valor extremo. En realidad los máximos y mínimos también se tienen en puntos donde la derivada no existe (véase ejemplo 8) o en puntos que son extremos de intervalo (véase ejemplo 9). A estos puntos se les llama *puntos críticos* de la función. Precisando se dice que

Definición 3

Un punto c en el dominio de una función es *punto crítico* de la función si ocurre uno de los siguientes casos:

1. $f'(c) = 0$,
2. $f'(c)$ no existe o
3. c es extremo de un intervalo que es dominio de la función f

Nota

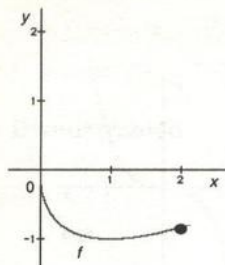
Para encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua en un intervalo cerrado, se calcula el valor de la función en cada uno de los puntos críticos, el mayor de estos valores es el máximo y el menor es el mínimo.

Ejemplo 12

Encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ sobre el intervalo $[0,2]$.

Solución

Se deriva f : $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$



Se observa que $f'(0)$ no existe y que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

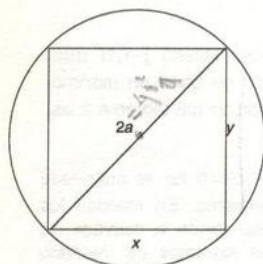
O sea, $f'(1) = 0$. Así que los puntos críticos de f sobre el intervalo $[0, 2]$ son 0, 1 y 2. Calculando f en estos puntos se tiene

$$f(0) = 0 \quad f(1) = -1 \quad -1 < f(2) = 2 - 2\sqrt{2} < 0$$

Por lo que $f(0) = 0$ es el valor máximo y $f(1) = -1$ es el valor mínimo de la función f sobre el intervalo $[0, 2]$.

Ejemplo 13

Solución



Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un círculo de radio a .

Supóngase que x y y son las dimensiones de un rectángulo inscrito en un círculo de radio a . Entonces, por el teorema de Pitágoras

$$x^2 + y^2 = 4a^2$$

De donde, $y = \sqrt{4a^2 - x^2}$. Si A es el área del rectángulo, se tiene que

$$A = xy = x\sqrt{4a^2 - x^2}$$

con $0 \leq x \leq 2a$. Calculando $A'(x)$ se tiene que $A'(x) = \frac{4a^2 - 2x^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$, en

donde se observa que $A'(2a)$ no existe y que

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}a$$

Por lo que, los puntos críticos de la función A sobre el intervalo $[0, 2a]$ son 0, $\sqrt{2}a$ y $2a$. Valuando A en estos puntos se tiene

$$A(0) = 0$$

$$A(\sqrt{2}a) = \sqrt{2}a\sqrt{4a^2 - (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{2}a\sqrt{2a^2} = 2a^2$$

$$A(2a) = 2a\sqrt{4a^2 - (2a)^2} = 2a\sqrt{0} = 0$$

Así que, $A(\sqrt{2}a) = 2a^2$ es el área máxima y las dimensiones del rectángulo con esta área son $x = \sqrt{2}a$ y $y = \sqrt{2}a$

Ejercicios 6.1

En los ejercicios del 1 al 21, encuentre los máximos y mínimos absolutos y locales (si los hay) de la función dada en el intervalo que se indica.

1. $f(x) = 2 - |x|$, $-1 \leq x \leq 1$

2. $f(x) = |x^2 - 1|$, $-2 \leq x \leq 2$

3. $f(x) = [x]$, $0 \leq x \leq 1$

4. $f(x) = x - [x]$, $0 \leq x \leq 1$

5. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $-2 \leq x \leq 2$

6. $f(x) = x - \sqrt{x}$, $0 \leq x < 1$

7. $f(x) = x - |x|, -1 \leq x < 1$

10. $f(x) = x^3 - |x|, -1 \leq x < 1$

13. $f(x) = \cos x, -\infty < x < \infty$

16. $f(x) = 2 - \sin x, -\pi < x \leq \pi$

19. $f(x) = \sin \sqrt{x}, 0 \leq x < \pi^2$

8. $f(x) = x + |x|, -1 < x \leq 1$

11. $f(x) = x^3 - 2x^2, -1 \leq x < 2$

14. $f(x) = |\sin x|, -\infty < x < \infty$

17. $f(x) = 4x - x^2, 0 \leq x < 4$

20. $f(x) = x^{2/3} - x, 0 \leq x \leq 8$

9. $f(x) = x^2 - |x|, -3 < x \leq 3$

12. $f(x) = 2x^2 - x^3, -1 \leq x < 2$

15. $f(x) = 2^{\sin x}, -2\pi < x < 2\pi$

18. $f(x) = \frac{2}{2x^2 + 1}, -1 \leq x < 1$

21. $f(x) = x^2 - [x], 0 \leq x \leq 1$

Del 22 al 43, encuentre los puntos críticos de la función dada sobre el intervalo que se indica.

22. $f(x) = 2x - x^2, [0, 2]$

23. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5, [-3, 1]$

24. $f(x) = x - x^{2/3}, [0, 8]$

25. $f(x) = |x - 1|, [0, 2]$

26. $g(x) = \frac{x^2}{x^3 - 2}, \left[-2, \frac{1}{2}\right]$

27. $h(x) = \frac{10x^2}{x^3 + 1}, \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

28. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, [-2, 2]$

29. $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, [-2, 2]$

30. $g(x) = \sin^2 x, [-\pi, \pi]$

31. $f(x) = |x - 1| |x|, [-1, 2]$

32. $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2, [-1, 2]$

33. $h(x) = x - 2\sin x, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

34. $f(x) = x^2 - 2^x, [0, 4]$

35. $g(x) = e^x - x, [-2, 2]$

36. $h(x) = |x - 2\sin x|, \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

37. $f(x) = \left| \frac{x}{x+1} \right|, [-2, 2]$

38. $g(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2, [-2, 1]$

39. $h(x) = \frac{2x^2}{2x+1}, [-2, 1]$

40. $p(t) = \frac{1}{t^2 + 1}, [-1, 1]$

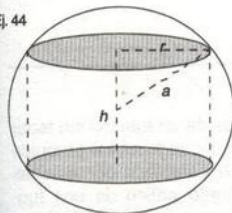
41. $s(t) = \frac{t^3 + 1}{t^2}, [0, 3]$

42. $f(x) = \sqrt{\frac{4 - x^3}{x^2}}, [-3, 0]$

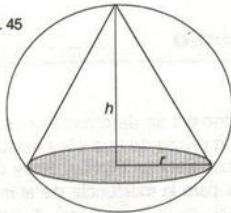
43. $r(t) = \frac{t^2}{t^3 - 1}, [-3, 2]$

44. Halle las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo inscrito en una esfera de radio a .

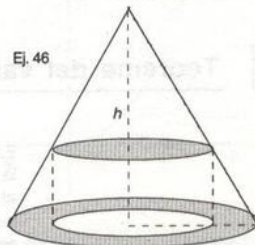
Ej. 44



Ej. 45



Ej. 46



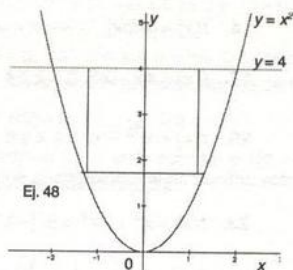
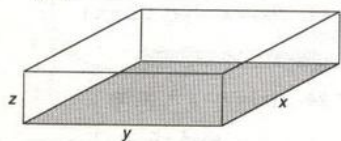
45. Encuentre las dimensiones del cono circular recto de volumen máximo inscrito en una esfera de radio a .

46. Encuentre las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo inscrito en un cono circular recto de radio a y altura h .

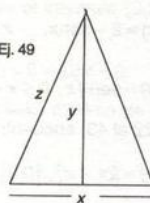
47. Encuentre las dimensiones que debe tener una caja de cartón sin tapa con 8 cm de altura y 3200 cm³ de volumen de modo que el material empleado para su construcción sea mínimo.

48. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima limitado por la recta $y = 4$ con dos de sus vértices sobre la parábola $y = x^2$

Ej. 47

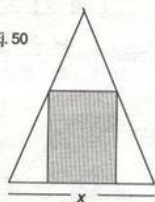


Ej. 49

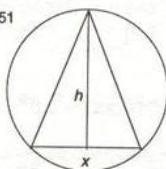


49. Encuentre la altura del triángulo isósceles de área máxima y perímetro constante.
50. Las longitudes de los lados de un triángulo isósceles son 10, 10 y 12 centímetros. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito con dos de sus vértices en dicho triángulo.

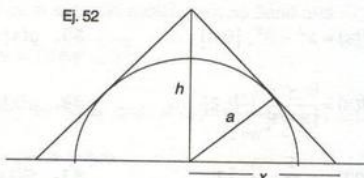
Ej. 50



Ej. 51



Ej. 52



51. Encuentre la base y la altura a dicha base del triángulo isósceles de área máxima inscrito en un círculo de radio a .
52. Encuentre las dimensiones del triángulo isósceles de área mínima que se puede circunscribir a un semicírculo de radio a .

6.2

Teorema del valor medio

En la sección 6.1 se determinaron puntos críticos de una función sin tener la seguridad previa de que ellos existieran. El siguiente teorema atribuido al matemático francés Michael Rolle (1652-1719) establece condiciones suficientes para la existencia de al menos un punto crítico de una función.

Teorema de Rolle

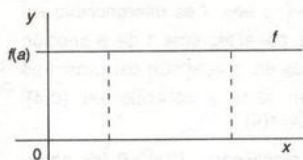
Si f es una función tal que:

1. f es continua en $[a, b]$ con $a \neq b$.
2. f es diferenciable en $]a, b[$.
3. $f(a) = f(b)$.

Entonces, existe un punto c en $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$

Demostración

Hay tres casos:

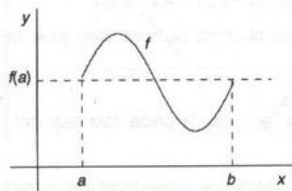


1. $f(x) = f(a)$ para todo x en $]a, b[$, en cuyo caso $f'(x) = 0$ para todo x en $]a, b[$. De donde, cualquier c en $]a, b[$ satisface que $f'(c) = 0$

2. $f(x) > f(a)$ para algún x en $]a, b[$. En este caso, por el teorema 1 de la sección 6.1, existe c en $]a, b[$ tal que $f(c)$ es el valor máximo de f en $]a, b[$. Así que

$$f(c) \geq f(x) > f(a) = f(b)$$

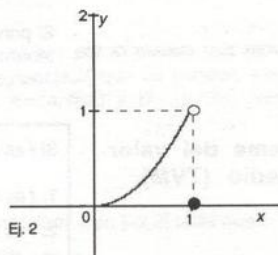
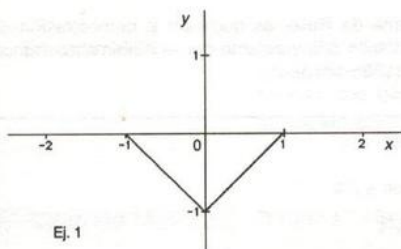
Por lo que, $c \neq a$ y $c \neq b$. Entonces c está en $]a, b[$. Por ser f diferenciable en $]a, b[$ se sigue que f está definida en un intervalo abierto que contiene a c y que $f'(c)$ existe. Por lo tanto, del teorema 2 de la sección 6.1 se concluye que $f'(c) = 0$



3. $f(x) < f(a)$ para algún x en $]a, b[$. Como en el caso anterior; en este caso, se toma c en $]a, b[$ tal que $f(c)$ es el valor mínimo de f en $]a, b[$ y de manera análoga se concluye que $f'(c) = 0$

Ejemplo 1

La función $f(x) = |x| - 1$ es continua en $[-1, 1]$ y $f(-1) = f(1)$, pero no existe c en $] -1, 1[$ tal que $f'(c) = 0$. Ello no contradice el teorema de Rolle porque f no es diferenciable en $] -1, 1[$. En efecto f no es diferenciable en $x = 0$



Ejemplo 2

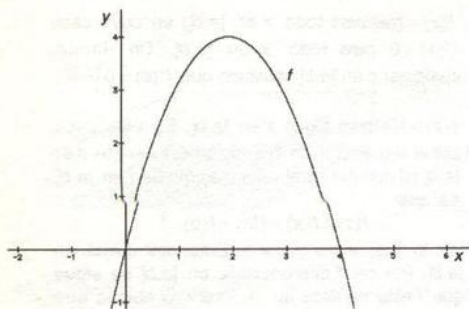
La función $f(x) = x^2 - [x]$ es diferenciable en $]0, 1[$ y $f(0) = f(1)$, pero no existe c en $]0, 1[$ tal que $f'(c) = 0$. Esto, tampoco contradice el teorema de Rolle porque f no es continua en $[0, 1]$. En efecto, f es discontinua en $x = 1$

Ejemplo 3

Demostrar que la función $f(x) = 4x - x^2$ satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$ y encontrar todos los números c en

$]0,4[$ tales que $f'(c) = 0$

Solución



Como $f'(x) = 4 - 2x$ es un número real para todo x en $]-\infty, \infty[$, se sigue que $f'(x)$ existe para todo x en $]-\infty, \infty[$; o sea, f es diferenciable en $]-\infty, \infty[$. Así que, por el teorema 1 de la sección 3.2, f es continua en $]-\infty, \infty[$. En particular f es diferenciable en $]0,4[$ y continua en $[0,4]$. Además $f(0) = 0 = f(4)$.

Por otra parte, resolviendo $f'(x) = 0$, se obtienen todos los números c en $]0,4[$ tales que $f'(c) = 0$. Observe:

$$4 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Así que, $c = 2$ es el único número c en $]0,4[$ tal que $f'(c) = 0$.

Ejemplo 4

Con el teorema de Rolle, demostrar que $a = 1$ es la única raíz real del polinomio $p(x) = x^3 + 2x - 3$

Solución

Supóngase que existe un número real b distinto de a que también es raíz de $p(x)$. Entonces $p(a) = 0 = p(b)$. Como p es diferenciable en todo número real x , se tiene que p es diferenciable en $]a,b[$ y continua en $[a,b]$. Por lo que, por el teorema de Rolle existe c en $]a,b[$ tal que $p'(c) = 0$. Por otra parte, $p'(x) = 3x^2 + 2$. De donde,

$$0 = p'(c) = 3c^2 + 2 \geq 2 > 0$$

lo cual es una contradicción.

El principal uso del teorema de Rolle, es quizá en la demostración del teorema que sigue, enunciado primeramente por el matemático francés Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Teorema del valor medio (TVM)

Si f es una función tal que:

1. f es continua en $[a,b]$ con $a \neq b$
2. f es diferenciable en $]a,b[$

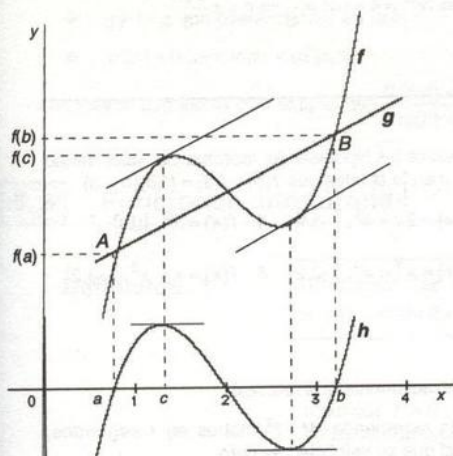
Entonces, existe un número c en $]a,b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

O bien, tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Demostración

En la figura adjunta:



- Está representada la gráfica de una función f que satisface las condiciones (1) y (2) del TVM.

- Está representada una función g cuya gráfica es la recta secante que pasa por los puntos

$$A = (a, f(a)) \text{ y } B = (b, f(b))$$

Entonces, g se define así

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$\text{O bien, } g(x) = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b)$$

- Está representada gráficamente la función $h = f - g$ cuya regla de correspondencia se determina así

$$h(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Por ser f y g continuas en $[a, b]$ y diferenciables en $]a, b[$, h es continua en $[a, b]$ y diferenciable en $]a, b[$. Además $h(a) = 0 = h(b)$. Entonces por el teorema de Rolle, existe c en $]a, b[$ tal que $h'(c) = 0$. Por otra parte:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Por lo que, $0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. De donde, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $\square$

Comentario

Geométricamente el TVM afirma que hay por lo menos una recta tangente a la gráfica de f sobre el intervalo $]a, b[$ que es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ (véase la gráfica anterior.)

Ejemplo 5

Si $f(x) = x^3 - 3x + 3$, encontrar los números c en $] -2, 2[$ tales que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}.$$

Solución

$f'(x) = 3x^2 - 3$. Entonces, $f'(c) = 3c^2 - 3$. Por otra parte:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{5 - 1}{4} = 1$$

Así que,

$$3c^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow 3c^2 = 4 \Leftrightarrow c^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow c = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicios 6.2

En los ejercicios del 1 al 10, verifique que cada función satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[a, b]$ que se indica y encuentre los números c en $]a, b[$ tales que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

1. $f(x) = 3x - 2$, $[0, 2]$
 2. $f(x) = x^2$, $[0, 2]$
 3. $f(x) = 2x - x^2$, $[-1, 1]$
 4. $f(x) = x^3$, $[0, 1]$
 5. $f(x) = x^3 - 4x$, $[-2, 0]$
 6. $f(x) = \sin x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
 7. $f(x) = x^3 - x^4$, $[-2, 2]$
 8. $f(x) = x - x^2$, $[-3, 2]$
 9. $f(x) = \frac{1}{x}$, $[1, 2]$
 10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $[0, 1]$
11. Demostrar que el polinomio $p(x) = x^5 + x^3 + 2x - 1$ tiene exactamente una raíz real.
 12. Si una partícula se mueve a lo largo de una línea recta recorriendo $4t - t^2$ metros en t segundos; demuestre que entre 0 y 4 segundos hay un instante en el que su velocidad es cero.
 13. Un cultivo de bacterias crece de modo que su masa es $t^2 + 2$ gramos en t horas. Demuestre que hay un tiempo t_0 entre 0 y 2 horas en el que la masa alcanza su crecimiento medio. ¿Qué valor tiene t_0 ?
 14. Considere la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Demuestre que no existe c en $] -1, 1[$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué no contradice este hecho el teorema de Rolle?
 15. Si $f(x) = \frac{1}{x}$, demuestre que no existe c en $] -2, 2[$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Este hecho contradice el teorema de Rolle?
 16. Considere $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{3-x}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Demuestre que f es continua en $[0, 2]$ y que no existe c en $]0, 2[$ tal que $f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$. ¿Por qué no contradice este hecho el teorema del valor medio?
 17. Si $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$, demuestre que no existe c en $] -1, 1[$ tal que $f(1) - f(-1) = 2f'(c)$. ¿Por qué no contradice esto el teorema del valor medio?
 18. Un auto se mueve en línea recta recorriendo $s(t)$ kilómetros en t horas. Si la función de posición $s = s(t)$ es diferenciable en todo instante t , y si el auto recorrió 240 kilómetros en 3 horas; demuestre que durante este recorrido existe al menos un instante t_0 en el que la velocidad del auto fue de $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
 19. Usando el teorema del valor medio demuestre que $|\cos b - \cos a| \leq |a - b|$ para cualesquiera a y b reales.
 20. Usando el teorema del valor medio, demuestre que la gráfica de una función cuya derivada es constante en todo punto x , es una recta.
 21. Si f es una función sobre y diferenciable con $f'(x) \neq 0$ para cada x en el $\mathcal{D}_f = [a, b]$, demuestre que existe f^{-1} función inversa de f .
 22. Supóngase que las funciones f y g son tales que:

- g y $f \circ g$ son continuas en $[a, b]$ con $a \neq b$
- g y $f \circ g$ son diferenciables en $]a, b[$
- $g'(x) \neq 0$ para todo x en $]a, b[$

Demuestre que existe c en $]a, b[$ tal que $\frac{f(g(b)) - f(g(a))}{g(b) - g(a)} = f'(g(c))$

6.3 Funciones monótonas

Definición 1

Una función f es *constante* en un intervalo I si para cualesquiera x_1, x_2 en I se cumple que $f(x_1) = f(x_2)$

En la sección 5.3 se estableció que, si una función f es constante, entonces $f' = 0$. El recíproco de este resultado es válido para intervalos como se demuestra enseguida.

Teorema 1

Si $f'(x) = 0$ para todo x en un intervalo I , entonces f es constante en I

Demostración

Considérense x_1, x_2 en I . Si $x_1 = x_2$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$. Si $x_1 \neq x_2$, entonces uno de ellos es menor que el otro. Digamos que $x_1 < x_2$. Se demostrará que $f(x_1) = f(x_2)$

Por ser f diferenciable en I , f es diferenciable en $]x_1, x_2[$ y continua en $[x_1, x_2]$. Entonces por el teorema del valor medio, existe c en $]x_1, x_2[$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Pero $f'(x) = 0$ para todo x en I , entonces $f'(c) = 0$. Por lo que, $f(x_2) - f(x_1) = 0$. De donde, $f(x_1) = f(x_2)$ $\square$

Corolario 1

Si $f'(x) = g'(x)$ para cada x en un intervalo I , entonces existe una constante k tal que

$$f(x) = g(x) + k$$

para todo x en I

Demostración

Tómese $h = f - g$. Entonces $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para cada x en I . Así que, por el teorema 1, h es constante en I . O sea, existe una constante k tal que $h(x) = k$ para todo x en I . Por lo que

$$f(x) - g(x) = (f - g)(x) = h(x) = k$$

De donde, $f(x) = g(x) + k$ para cada x en I $\square$

Ejemplo 1

La función $f(x) = [x]$ es tal que $f'(x) = 0$ para todo x en $[0,1[$ o en $]1,2]$. Pero f no es constante. Ello no contradice el teorema 1, porque los intervalos $[0,1[$ y $]1,2]$ unidos no forman un intervalo.

Ejemplo 2

Las funciones $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ son tales que

$f'(x) = g'(x)$ para todo x en el $\mathcal{D}_f$ y en el $\mathcal{D}_g$; pero $f - g$ no es constante en la intersección de los dominios de f y g . Esto no contradice el corolario 1; porque $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g =]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$ no es un intervalo.

Definición 2

1. Una función f es *creciente* en un intervalo I , si

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

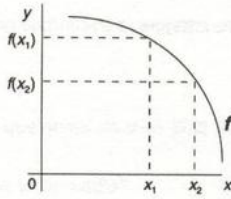
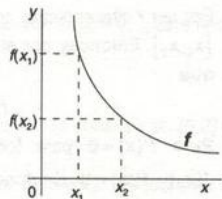
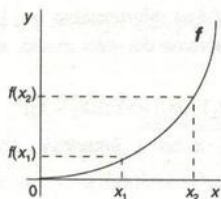
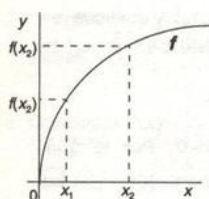
para cada par de puntos distintos x_1 y x_2 en I

2. Una función f es *decreciente* en un intervalo I , si

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

para cada par de puntos distintos x_1 y x_2 en I

3. Una función f es *monótona* en un intervalo I , si es creciente o decreciente en I

**Ejemplo 3**

Considérese la función $f(x) = x^2$. Entonces

1. f es monótona creciente en $[0, \infty[$, porque:

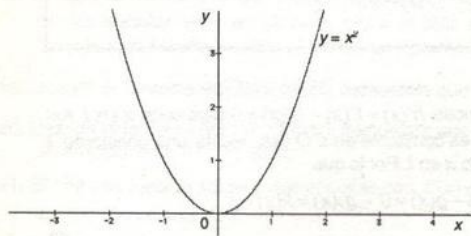
$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = x_1^2 < x_2^2 = f(x_2)$$

para cada par de puntos distintos x_1 y x_2 en $[0, \infty[$

2. f es monótona decreciente en $]-\infty, 0]$, porque:

$$x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow f(x_1) = x_1^2 > x_2^2 = f(x_2)$$

para cada par de puntos distintos x_1 y x_2 en $]-\infty, 0]$



El siguiente teorema da condiciones para saber si una función es creciente o decreciente.

Teorema 2

Supóngase que f es una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en $]a, b[$ con $a \neq b$

1. Si $f'(x) > 0$ para todo x en $]a, b[$, entonces f es creciente en $[a, b]$
2. Si $f'(x) < 0$ para todo x en $]a, b[$, entonces f es decreciente en $[a, b]$

Demostración

1. Considérense un par de puntos x_1 y x_2 en $[a, b]$ con $x_1 < x_2$. Por ser f continua en $[a, b]$ y diferenciable en $]a, b[$, se sigue que f es continua en $[x_1, x_2]$ y diferenciable en $]x_1, x_2[$. Así que, por el teorema del valor medio, existe c en $]x_1, x_2[$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Pero, $f'(c) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$. Entonces, $f'(c)(x_2 - x_1) > 0$. Así que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

De donde, $f(x_1) < f(x_2)$. Por lo tanto, f es creciente en $[a, b]$.

2. La segunda parte del teorema se demuestra en forma similar. □

Ejemplo 4

Encontrar los intervalos en donde $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 1$ es creciente y en los que es decreciente.

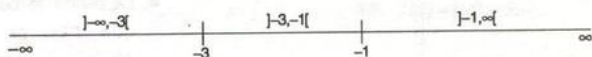
Solución

Se determinan los puntos críticos igualando a cero la derivada de f .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow 3(x+3)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+3=0 \text{ o } x+1=0 \Leftrightarrow x=-3 \text{ o } x=-1$$

Entonces los únicos puntos críticos de f son -1 y -3 . Estos números determinan intervalos abiertos en la recta numérica. Observe:



En estos intervalos la función f es creciente o es decreciente dependiendo esto del signo de $f'(x)$ en ellos.

- El signo de $f'(x)$ en $]-\infty, -3[$ se determina como sigue:

$$x \text{ en }]-\infty, -3[\Rightarrow x < -3 < -1 \Rightarrow x < -3 \text{ y } x < -1 \Rightarrow x+3 < 0 \text{ y } x+1 < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3(x+3)(x+1) > 0 \text{ para todo } x \text{ en }]-\infty, -3[$$

Así que por el teorema 2, f es creciente en $]-\infty, -3[$

- El signo de $f'(x)$ en $]-3, -1[$ se determina así:

$$x \text{ en }]-3, -1[\Rightarrow -3 < x < -1 \Rightarrow -3 < x \text{ y } x < -1 \Rightarrow 0 < x+3 \text{ y } x+1 < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3(x+3)(x+1) < 0 \text{ para todo } x \text{ en }]-3, -1[$$

Así que por el teorema 2, f es decreciente en $]-3, -1[$

- El signo de $f'(x)$ en $]-1, \infty[$ se determina como sigue:

$$x \text{ en }]-1, \infty[\Rightarrow -3 < -1 < x \Rightarrow -3 < x \text{ y } -1 < x \Rightarrow 0 < x+3 \text{ y } 0 < x+1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3(x+3)(x+1) > 0 \text{ para todo } x \text{ en }]-1, \infty[$$

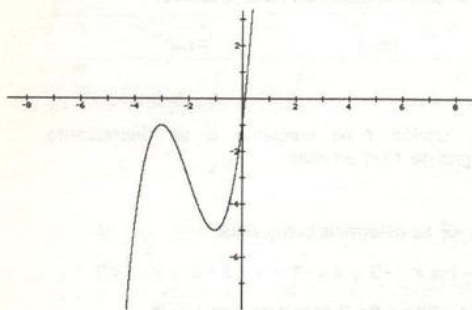
Así que por el teorema 2, f es creciente en $]-1, \infty[$

En la práctica es útil sintetizar esta información en una tabla como sigue:

Punto crítico x	$-\infty$	-3	-1	∞
Intervalo	$]-\infty, -3[$		$]-3, -1[$	$]-1, \infty[$
$f'(x)$	$+\nearrow$		$\searrow-$	$+\nearrow$
$f(x)$				

En la tabla:

- La flecha $\nearrow$ colocada abajo de $]-\infty, -3[$ indica que $f'(x)$ es positiva en $]-\infty, -3[$. O sea, $f'(x) > 0$ para todo x en $]-\infty, -3[$
- La flecha $\searrow$ colocada abajo del intervalo $]-3, -1[$ en el tercer renglón de la tabla indica que f es decreciente en $]-3, -1[$
- Las flechas sin signo del cuarto renglón de la tabla y los valores de la función en los puntos críticos, así como los límites al infinito $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, simulan el comportamiento de la gráfica de f la cual aparece en la figura adjunta.



Ejemplo 5

Demostrar que $\frac{4}{a^2} - a < \frac{4}{b^2} - b$ siempre que $b < a < -2$

Solución

Considérese la función $f(x) = \frac{4}{x^2} - x = 4x^{-2} - x$. Su derivada es:

$$f'(x) = -8x^{-3} - 1 = (-1)(8x^{-3} + 1) = (-1)\left(\frac{x^3 + 8}{x^3}\right)$$

Supóngase que $x < -2$. Entonces

$$x < -2 \Rightarrow \frac{x^3 + 8}{x^3} > 0 \Rightarrow f'(x) = (-1)\left(\frac{x^3 + 8}{x^3}\right) < 0$$

para todo $x < -2$. Así que por el teorema 1, f es decreciente en $]-\infty, -2[$

De donde

$$b < a < -2 \Rightarrow f(b) = \frac{4}{b^2} - b > \frac{4}{a^2} - a = f(a)$$

O sea, $\frac{4}{a^2} - a < \frac{4}{b^2} - b$ siempre que $b < a < -2$

Ejercicios 6.3

En los ejercicios del 1 al 21, encuentre los intervalos en los que la función dada es creciente y en los que es decreciente. Además, bosqueje gráficamente la función.

1. $f(x) = 1 + 24x - 3x^2 - x^3$

2. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

3. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

4. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1$

5. $f(x) = \frac{10x^2}{x^3 + 1}$

6. $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$

7. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 1$

8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

9. $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$

10. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

11. $f(x) = \frac{x+1}{x}$

12. $f(x) = x^2 - 2|x|$

13. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x & \text{si } x \neq 0 \text{ y } -2\pi < x < 2\pi \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

14. $f(x) = (1 - x^2)^2$

15. $f(x) = (x^3 - 3x)^2$

16. $f(x) = \ln x^2$

17. $f(x) = x - \ln|x|$

18. $f(x) = \frac{1}{1 - e^{|x|}}$

19. $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^3 - x - 2$

20. $f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}$

21. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x$

En los ejercicios del 22 al 28, demuestre cada proposición.

22. $a + \frac{1}{a} < b + \frac{1}{b}$ para todo $a < b < -1$.

23. $\sin x < x$ para todo $x > 0$.

24. $\sin x > x$ para todo $x < 0$.

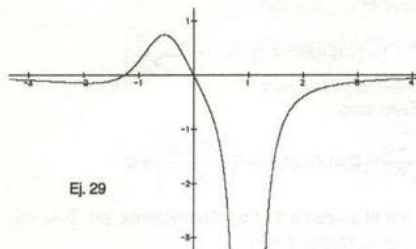
25. $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ para todo número real x .

26. $\tan x < x$ para todo $-\frac{\pi}{2} < x < 0$

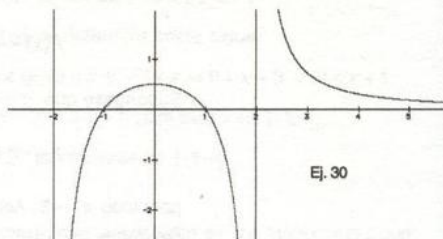
27. a y b en $]0, \infty[\Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$

28. $e^x > \frac{a}{x+a}$ si $x > 0$ y $a > 0$

29. Bosqueje la gráfica de una función f tal que $f(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y la gráfica de su derivada f' está dada en la figura adjunta.



Ej. 29



Ej. 30

30. Bosqueje la gráfica de una función f tal que $f(-1)=1$, $f(1)=2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=-1$ y la gráfica de su derivada f' está dada en la figura adjunta.
31. La función $f(x) = \frac{x}{|x|}$ es tal que $f'(x)=0$ para todo x en su dominio $\mathcal{D}_f$; pero f no es constante. ¿Por qué ello no contradice el teorema 1 de la sección 6.3?

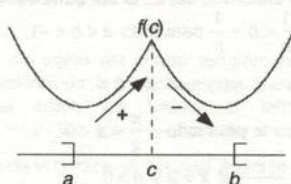
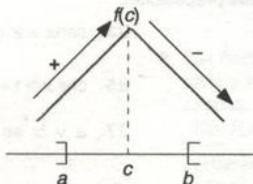
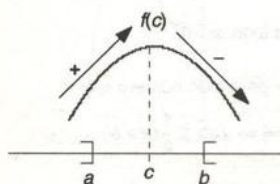
6.4 Criterios de la primera y segunda derivadas

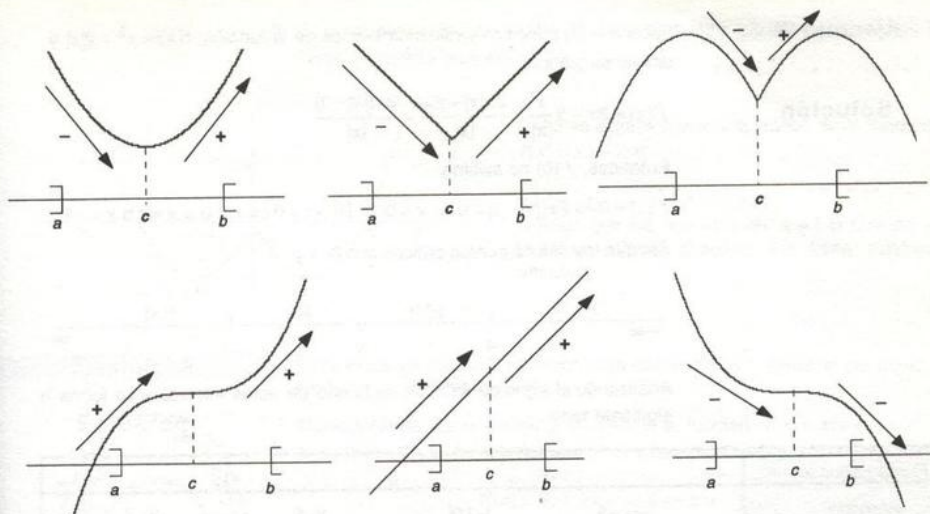
Los criterios que siguen establecen condiciones para que una función f tenga un máximo local o un mínimo local en un punto c .

Criterio de la primera derivada

Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que c en $]a, b[$ es punto crítico de f

1. Si $f'(x) > 0$ para todo x en $]a, c[$ y $f'(x) < 0$ para todo x en $]c, b[$, entonces f tiene un máximo local en c
2. Si $f'(x) < 0$ para todo x en $]a, c[$ y $f'(x) > 0$ para todo x en $]c, b[$, entonces f tiene un mínimo local en c
3. Si $f'(x) > 0$ para cada x en $]a, c[$ y $f'(x) > 0$ para todo x en $]c, b[$, o si $f'(x) < 0$ para cada x en $]a, c[$ y $f'(x) < 0$ para cada x en $]c, b[$ entonces f no tiene un máximo local ni un mínimo local en c



**Demostración**

1. $f'(x) > 0$ para todo x en $]a, c[$ implica que f es creciente en $]a, c[$, lo cual implica que $f(x) < f(c)$ para todo x en $]a, c[$

$f'(x) < 0$ para todo x en $]c, b[$ implica que f es decreciente en $]c, b[$, lo cual implica que $f(x) < f(c)$ para todo x en $]c, b[$. Así que

$$f(x) \leq f(c)$$

para todo x en $]a, b[$. Tómese $\delta = \min\{c - a, b - c\}$. Entonces

$$f(x) \leq f(c)$$

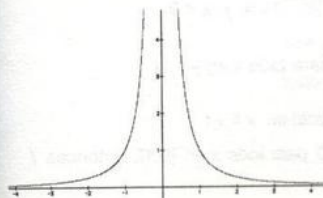
para cada x en $]c - \delta, c + \delta[$. Así que, f tiene un máximo local en c .

2. La demostración de la parte 2, es análoga a la de la parte 1.

3. En forma similar a la parte 1, se establece que f es creciente o f es decreciente en $[a, b]$; en cuyo caso, f no tiene máximo local ni mínimo local en c .

Ejemplo 1

La función $f(x) = x^{-2}$ satisface que



- $f'(x) > 0$ para todo x en $]-1, 0[$
- $f'(x) < 0$ para todo x en $]0, 1[$

Pero f no tiene máximo local en $x = 0$. Ello no contradice el criterio de la primera derivada, porque f no es continua en $[-1, 1]$. En efecto, f no es continua en $x = 0$

Ejemplo 2

Encontrar los máximos y mínimos locales de la función $f(x) = x^2 - 2|x|$ y dibujar su gráfica.

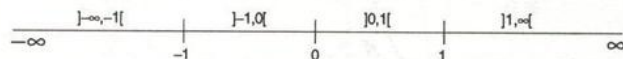
Solución

$$f'(x) = 2x - 2 \frac{x}{|x|} = \frac{2x|x| - 2x}{|x|} = \frac{2x(|x| - 1)}{|x|}$$

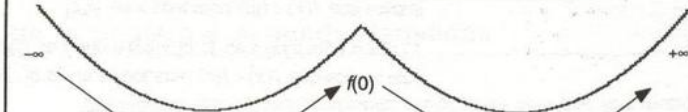
Entonces, $f'(0)$ no existe y

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(|x| - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } |x| - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 1 \text{ o } x = -1$$

Así que los únicos puntos críticos son 0, 1 y -1



Analizando el signo de $f'(x)$ en cada uno de estos intervalos se forma la siguiente tabla.

Punto crítico x	$-\infty$	-1	0	1	∞
Intervalo	$]-\infty, -1[$	$]-1, 0[$	$]0, 1[$	$]1, \infty[$	
$f'(x)$	$-$ ↘	$+$ ↗	$-$ ↘	$+$ ↗	
$f(x)$					

La tabla indica que:

1. $f'(x) < 0$ para todo x en $]-\infty, -1[$ y $f'(x) > 0$ para todo x en $]-1, 0[$. En efecto:

$$\bullet \ x \text{ en }]-\infty, -1[\Rightarrow x < -1 < 0 \Rightarrow x < -1 \text{ y } x < 0 \Rightarrow |x| = -x > 1 \text{ y } x < 0$$

$$\Rightarrow |x| - 1 > 0 \text{ y } x < 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(|x| - 1)}{|x|} < 0 \text{ para todo } x \text{ en }]-\infty, -1[$$

$$\bullet \ x \text{ en }]-1, 0[\Rightarrow x < -1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow -1 < x \text{ y } x < 0$$

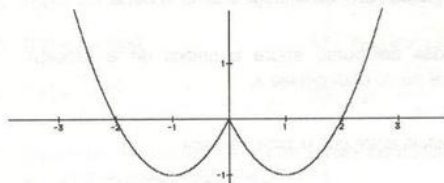
$$\Rightarrow |x| = -x < 1 \text{ y } x < 0 \Rightarrow |x| - 1 < 0 \text{ y } x < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x(|x| - 1)}{|x|} > 0 \text{ para todo } x \text{ en }]-1, 0[$$

Por lo que, f tiene un mínimo relativo o local en $x = -1$

2. $f'(x) > 0$ para todo x en $]-1, 0[$ y $f'(x) < 0$ para todo x en $]0, 1[$. Entonces f tiene un máximo local en $x = 0$

3. $f'(x) < 0$ para todo x en $]0, 1[$ y $f'(x) > 0$ para todo x en $]1, \infty[$. Entonces f tiene un mínimo local en $x = 1$



La figura adjunta muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2|x|$

Nótese que en $x = -1$ y en $x = 1$ la función f tiene un mínimo absoluto. No tiene máximo absoluto.

Ejemplo 3

Entre todos los pares de números cuya diferencia es 1, hallar el par cuyo producto es mínimo.

Considérense los números x y $x+1$ y la función $f(x) = x(x+1) = x^2 + x$. Entonces, $f'(x) = 2x + 1$. Así que $f'(x)$ existe para todo x , y

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Por lo que, el único punto crítico es $-\frac{1}{2}$. Como $f'(x) < 0$ para todo x en $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ y $f'(x) > 0$ para todo x en $]-\frac{1}{2}, \infty[$ entonces f tiene un mínimo local en $x = -\frac{1}{2}$. De donde, $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ es el par de números cuya diferencia es 1 y cuyo producto es mínimo.



Criterio de la segunda derivada

Supóngase que f es diferenciable en $]a, b[$ y que en c en $]a, b[$, $f'(c) = 0$ y $f''(c)$ existe.

1. Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c .
2. Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c .

Demostración

$$1. f''(c) < 0 \Rightarrow f''(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0$$

Si para cada $\delta > 0$ existe x en $]c - \delta, c + \delta[$ tal que $\frac{f'(x)}{x - c} \geq 0$, entonces por el teorema 2 de la sección 4.3 se sigue que $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{x - c} \geq \lim_{x \rightarrow c} 0 = 0$, lo cual contradice la hipótesis. Así que, existe $\delta > 0$ tal que $\frac{f'(x)}{x - c} < 0$ para todo x en $]c - \delta, c + \delta[$. De donde

- $f'(x) > 0 \cdot (x - c) = 0$ para todo x en $]c - \delta, c[$ y
- $f'(x) < 0 \cdot (x - c) = 0$ para todo x en $]c, c + \delta[$

Entonces por el criterio de la primera derivada, f tiene un máximo local en c .

2. La demostración de la segunda parte es análoga a la de la parte 1.

Ejemplo 4

Encontrar las coordenadas del punto sobre la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$, más cercano al punto $(2,0)$ del eje x .

Solución

Por la fórmula de la distancia entre dos puntos se tiene

$$\begin{aligned} d &= d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} \\ &= \sqrt{(x-2)^2 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 4} \end{aligned}$$

$$d'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}}$$

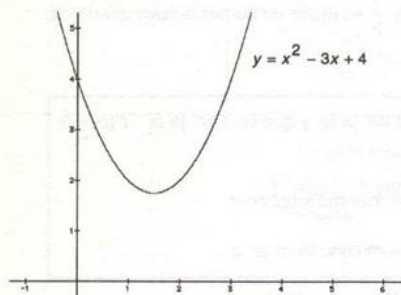
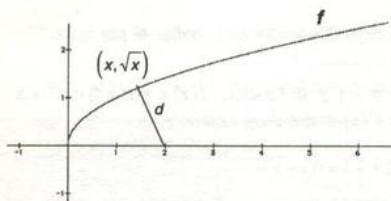
Como $x^2 - 3x + 4 > 0$ para todo x en $]-\infty, \infty[$, entonces $d'(x)$ existe para todo x en $]-\infty, \infty[$. Además:

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Entonces el único punto crítico de la función $d = d(x)$ es $\frac{3}{2}$. Por otra parte

$$d''(x) = \frac{7}{4(x^2 - 3x + 4)^{3/2}}$$

De donde, $d''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} > 0$. Entonces por el criterio de la segunda derivada, en $x = \frac{3}{2}$ la distancia d es mínima. Y las coordenadas del punto de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en que d es mínima son $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.



Ejercicios 6.4

En los ejercicios del 1 al 20, encuentre los máximos y mínimos locales de cada función y dibuje su gráfica.

1. $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 3$

2. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 7$

3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

4. $f(x) = (1 - x^3)^2$

5. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$

6. $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$

7. $f(x) = x + 4x^{-2}$

8. $f(x) = |x^2 - 1|$

9. $f(x) = (1 - x^2)^2$

10. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

11. $f(x) = (x-1)^{2/3}$

12. $f(x) = x \ln x$

13. $f(x) = x - e^x$

14. $f(x) = xe^x$

15. $f(x) = xe^{-x}$

16. $f(x) = x - \ln|x|$

17. $f(x) = x + \ln|x|$

18. $f(x) = e^{|x|}$

19. $f(x) = \frac{1}{x} e^{|x|}$

20. $f(x) = \frac{\ln x}{(1 + \ln x)^2}$

21. Encuentre los valores de a y de b para los cuales $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 15$ tenga un máximo local en $x = -3$ y un mínimo local en $x = 1$

22. Encuentre los valores de a , b y c para los cuales $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 20$ tiene un mínimo local en $x = 1$ y $f(-2) = 0$ es un valor máximo local.

23. Entre las parejas que suman 1, encuentre la pareja:

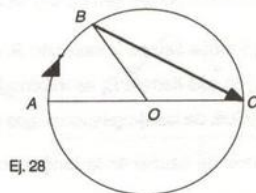
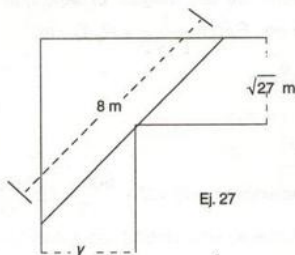
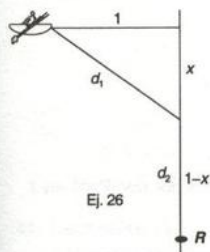
a) Cuya diferencia de cubos es mínima.

b) Cuya diferencia de cubos es máxima.

24. Un alambre de 1 metro de largo se va a cortar en dos pedazos, uno de ellos formará un cuadrado y el otro un círculo. ¿Dónde debe hacerse el corte para que la suma de las áreas de dichas figuras sea mínima?

25. Demuestre que $\sqrt{a} \geq a \geq a^2$ si $0 \leq a \leq 1$

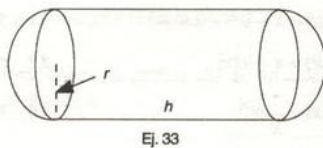
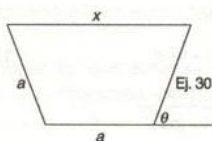
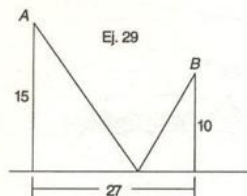
26. Una persona está en el mar en una lancha de remos a 1 kilómetro de la orilla recta de una playa y un restaurante está a 1 kilómetro abajo del punto más cercano a la lancha sobre la playa. Si la persona puede remar a $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ y puede caminar a $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, ¿dónde debe desembarcar para llegar al restaurante lo más pronto posible?



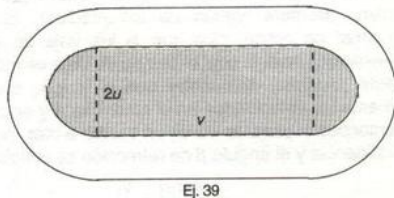
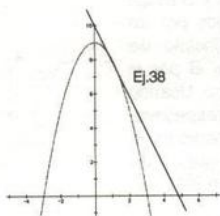
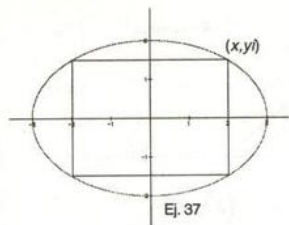
27. En una bodega se va a abrir un pasillo perpendicular a otro de $\sqrt{27}$ metros de ancho. Encuentre el mínimo ancho que debe tener el pasillo para que un tubo galvanizado de 8 m de largo se mueva de un pasillo a otro en posición horizontal.

28. Un caballero puede caminar por el borde de una alberca circular de radio r a una velocidad de $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ y puede nadar a $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ en la alberca. Si hay una dama en el punto del borde de la alberca diametralmente opuesto a la posición del caballero, determine el mínimo tiempo en que el caballero puede llegar con la dama.

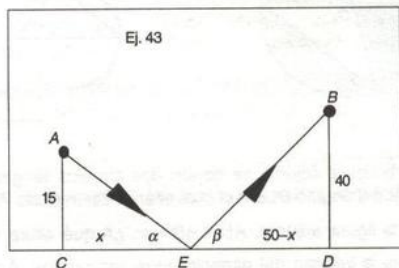
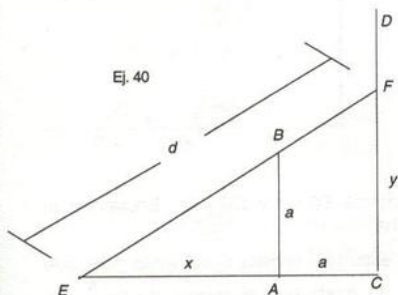
29. Dos ciudades A y B tendrán abastecimiento de agua de una misma estación de bombeo localizada en la rívera de un río recto que está a 15 kilómetros de la ciudad A y a 10 kilómetros de la ciudad B . Si los puntos sobre el río más cercanos a las ciudades están separados 27 kilómetros y si las ciudades están del mismo lado del río, ¿dónde debe estar la estación para usar la menor cantidad de tubería?



30. Se desea construir un canal cuya sección transversal tendrá la forma de un trapecio isósceles con lados no paralelos iguales a la base menor de longitud a como se muestra en la figura adjunta. Determine el valor de θ para que el volumen del canal sea máximo.
31. Un biólogo cultiva truchas en un estanque. El sabe que hay x truchas por unidad de área de agua y que cada trucha aumenta de peso en promedio por estación $20 - x$ gramos. ¿Cuántas truchas debe haber por unidad de área de agua para que el peso aumentado por estación en la producción de truchas sea máximo?
32. Un padre se muestra generoso con sus hijos al decirles, que regalará a cada uno el terreno rectangular que pueda marcar con un cable que mide 100 metros de largo. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno para que su área sea máxima?
33. Se desea fabricar para un camión "pipa", el tanque en el que se depositarán para su distribución 24000 litros de leche que una empresa produce diariamente. El tanque tendrá la forma que se muestra en la figura adjunta. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del tanque para que el material utilizado en su construcción sea mínimo?
34. Un bioquímico investiga el comportamiento de dos drogas. El sabe que la reacción de cada una como función del tiempo (en horas) está dada por $R_1(t) = \frac{t}{t^3 + 2}$ y $R_2(t) = te^{-t}$
- ¿En qué tiempo la reacción R_1 es máxima?
 - ¿En qué tiempo R_2 es máxima?
 - ¿Cuál de las drogas reacciona mejor?
35. El nivel de azúcar en la sangre de un paciente es $a(t) = 5t + \frac{500}{t+2} + 18 \frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ (miligramos por decilitro) en t horas con $0 \leq t \leq 24$
- ¿En qué momento el paciente tiene el más bajo nivel de azúcar?
 - ¿Cuál es el nivel más bajo?
36. El pH de una sustancia es un número entre 0 y 14 que mide la acidez o la alcalinidad de la sustancia. Si el pH es menor que 7 la sustancia es ácida y si es mayor que 7 es alcalina. Un grupo de ambientalistas está preocupado porque en los últimos 5 años el pH de la lluvia en cierta región del planeta se comporta como $a(t) = 7 - \frac{16t}{t^2 + 4}$ en t años. Suponga que en el presente año no hay alcalinidad ni acidez.
- ¿Hace cuántos años, la lluvia en esa región tuvo su máximo pH ?
 - ¿Dentro de cuántos años la lluvia en esa región tendrá su mínimo pH ?
37. Encontrar las dimensiones del rectángulo de máxima área y el de máximo perímetro inscritos en la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ con sus lados paralelos a los ejes de la elipse.



38. Encuentre la ecuación de la tangente a la gráfica de $y = 9 - x^2$ que forma en el primer cuadrante el triángulo de menor área con los ejes coordenados.
39. La superficie con pasto de una pista de atletismo tiene la forma sombreada en la figura adjunta con un perímetro de 400 metros. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que tenga la máxima área de pasto?
40. Se desea colocar un tirante de acero $\overline{EF}$ para contener dos postes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de alumbrado público como se muestra en la figura adjunta. Si $AB = AC = a$ metros ($a > 0$), encuentre la mínima longitud que debe tener el tirante para tal cosa.

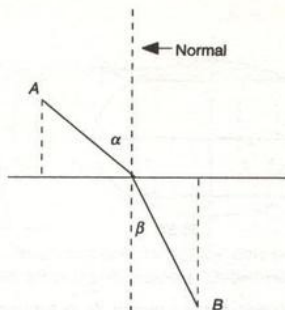


41. Demuestre que el triángulo isósceles de máxima área determinado por una cuerda y dos radios de un mismo círculo, es un triángulo rectángulo.
42. Un objeto es lanzado verticalmente desde el piso hacia arriba alcanzando aproximadamente una altura $s(t) = 64t - 4t^2$ metros en t segundos.
- ¿En qué momento alcanza su altura máxima?
 - ¿Qué altura máxima alcanza?
43. Dos bolas de billar A y B se encuentran respectivamente a 15 y 40 centímetros de una de las bandas de una mesa de billar. Hay 50 centímetros de distancia entre los respectivos puntos de la banda más cercanos a A y a B . Si la bola A se dirige en línea recta a un punto de la banda entre C y D y luego hacia la bola B (véase figura adjunta) entonces:
- ¿A qué distancia de C se debe tomar E para que el recorrido de la bola sea mínimo?
 - ¿Cómo son los ángulos α y β si el recorrido es mínimo?

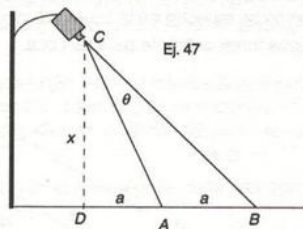
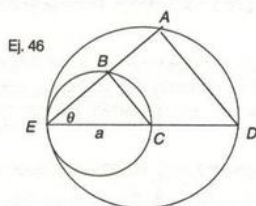
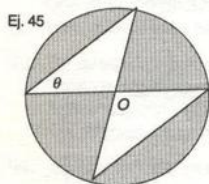
44. La figura adjunta muestra la trayectoria de un rayo luminoso que va de un punto A a un punto B en donde A y B están en medios diferentes, los cuales están separados por un plano (frontera común de los medios). El principio de Fermat en óptica, dice que la luz viaja de A a B por la trayectoria para la cual el tiempo de viaje es mínimo. Usando este principio, demuestre que si v_1 y v_2 son respectivamente las velocidades en el medio de A y en el medio de B ; entonces al pasar la luz de un medio a otro, el ángulo α de incidencia y el ángulo β de refracción se relacionan así

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

Este resultado se conoce como Ley de Snell.



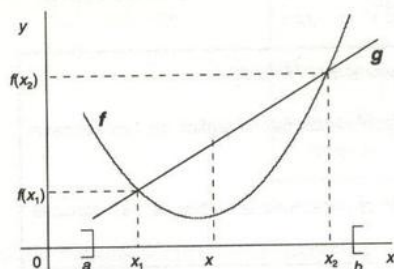
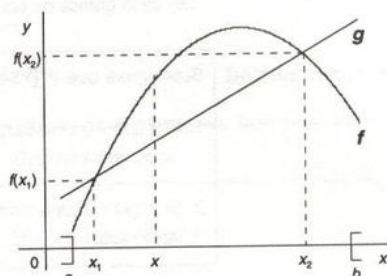
45. En la figura adjunta O es el centro del círculo. Encuentre el valor del ángulo θ para el cual el área de lo sombreado es mínima.



46. En la figura adjunta se tienen dos círculos tangentes con diámetros $EC = a$ y $ED = 2a$. Encuentre el valor del ángulo θ para el cual el área del trapecio $ABCD$ es máxima.
47. En la figura adjunta $AD = AB = a$. ¿A qué altura $CD = x$ debe estar una cámara C de video para que capte la imagen del espacio entre los puntos A y B del piso, de modo que el ángulo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ sea máximo?
48. Encuentre las dimensiones del terreno rectangular de máxima área que se puede cercar con un costo de \$20 pesos por metro lineal a lo largo y con \$35 por metro lineal a lo ancho, suponiendo que se dispone para ello de \$280.
49. Encuentre dos números que su diferencia sea 10 y que su producto sea mínimo.
50. Encuentre dos números que sumen 10 y su producto sea máximo.

6.5 Concavidades y puntos de inflexión

Las gráficas de muchas funciones se flexionan (se doblan). La flexión de una curva se conoce como *concavidad* la cual puede ser *hacia arriba* o *hacia abajo*.

La gráfica de f es cóncava hacia arribaLa gráfica de f es cóncava hacia abajo

En las gráficas anteriores se observa que:

1

La función g tiene por gráfica a la recta que pasa por los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$, por lo que

$$g(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

O bien:
$$g(x) = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

2

La gráfica de f es cóncava hacia arriba en $]x_1, x_2[$, si $f(x) < g(x)$ para todo x en $]x_1, x_2[$.

3

La gráfica de f es cóncava hacia abajo en $]x_1, x_2[$, si $f(x) > g(x)$ para todo x en $]x_1, x_2[$.

Precisando se dice que:

Definición 1

1. La gráfica de una función f es *cóncava hacia arriba* en un intervalo $]a, b[$, si para cualesquiera puntos distintos x_1 y x_2 en $]a, b[$ se cumple que

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ para todo } x \text{ en }]x_1, x_2[$$

2. La gráfica de una función f es *cóncava hacia abajo* en un intervalo $]a, b[$, si para cualesquiera puntos distintos x_1 y x_2 en $]a, b[$ se cumple que

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ para todo } x \text{ en }]x_1, x_2[$$

El criterio que sigue establece condiciones para decidir sobre la concavidad de la gráfica de una función.

Criterio de concavidad

Supóngase que $f''(x)$ existe para todo x en $]a, b[$

1. Si $f''(x) > 0$ para todo x en $]a, b[$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en $]a, b[$
2. Si $f''(x) < 0$ para todo x en $]a, b[$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en $]a, b[$

Demostración

1. Considérense x_1 y x_2 distintos en $]a, b[$. Se demostrará que

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ para todo } x \text{ en }]x_1, x_2[$$

Supóngase que x está en $]x_1, x_2[$. Como $f''(x)$ existe para todo x en $]a, b[$ se sigue que f es diferenciable en $]a, b[$, de donde f es continua en $[x_1, x]$ y diferenciable en $]x_1, x[$. Así que, por el teorema del valor medio, existe c_1 en $]x_1, x[$ tal que

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1)$$

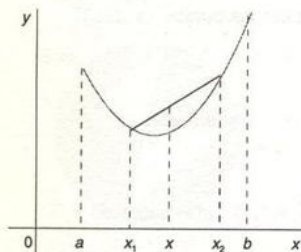
Análogamente, existe c_2 en $]x, x_2[$ tal que $f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$. Por ser $f''(x) > 0$ para todo x en $]a, b[$, f' es creciente en $]a, b[$. De donde $f'(c_1) < f'(c_2)$. Por lo que

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} &< \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \\ \Leftrightarrow (f(x) - f(x_1))(x_2 - x) &< (f(x_2) - f(x))(x - x_1) \\ \Leftrightarrow f(x)(x_2 - x) + f(x_1)(x - x_1) &< f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x) \\ \Leftrightarrow f(x)(x_2 - x_1) &< f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x) \\ &= f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x) - f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1)(x_2 - x_1) \\ &= f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x - x_1) - f(x_1)(x - x_1) \\ &= f(x_1)(x_2 - x_1) + (f(x_2) - f(x_1))(x - x_1). \end{aligned}$$

O sea, $f(x)(x_2 - x_1) < f(x_1)(x_2 - x_1) + (f(x_2) - f(x_1))(x - x_1)$. De donde

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

2. La demostración de la segunda parte es análoga a la de la primera parte. $\square$



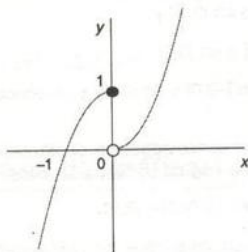
Definición 2

Un punto $(c, f(c))$ es *punto de inflexión* de f si existe un intervalo $]a, b[$ con c en $]a, b[$ tal que

1. f es continua en $]a, b[$ y
2. La gráfica de f es cóncava hacia abajo en $]a, c[$ y es cóncava hacia arriba en $]c, b[$ o viceversa

Ejemplo 1

Considérese la función $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$



La gráfica de esta función es cóncava hacia abajo en $] -1, 0[$ y es cóncava hacia arriba en $] 0, 1[$ pero el punto $(0, f(0)) = (0, 1)$ no es punto de inflexión porque f no es continua en $] -1, 1[$. En efecto, f no es continua en $x = 0$.

Del criterio de concavidad y la definición anterior se infiere la siguiente regla.

Regla

Supóngase que f es continua en $]a, b[$. Un punto $(c, f(c))$ con c en $]a, b[$ es punto de inflexión de la gráfica de f si ocurre una de las siguientes afirmaciones

1. $f''(x) > 0$ para todo x en $]a, c[$ y $f''(x) < 0$ para todo x en $]c, b[$ o
2. $f''(x) < 0$ para todo x en $]a, c[$ y $f''(x) > 0$ para todo x en $]c, b[$

Comentario

Si ocurre una de las afirmaciones anteriores, por el criterio de la primera derivada se infiere que en c , f' tiene un valor extremo y si $f''(c)$ existe, entonces por el teorema 2 de la sección 6.1 se sigue que $f''(c) = 0$. Por lo tanto, igualando a cero la segunda derivada de una función se obtienen los posibles puntos de inflexión de la gráfica de la función f .

Ejemplo 2

Encontrar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de

$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ y dibujar su gráfica.

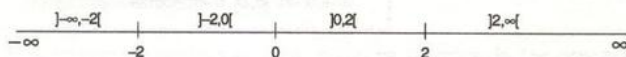
Solución

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4 - x(2x)}{(x^2 - 4)^2} = -\frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2} \text{ y } f''(x) = \frac{2x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$$

Entonces $f''(2)$ y $f''(-2)$ no existen y

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 12) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x^2 + 12 = 0$$

Pero $x^2 + 12 > 0$, entonces $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Así que, los únicos puntos críticos de f' son 0, 2 y -2. Estos puntos determinan los siguientes intervalos



Analizando el signo de $f''(x)$ en cada uno de estos intervalos se determinan las concavidades de la gráfica de f o concavidades de f . Como

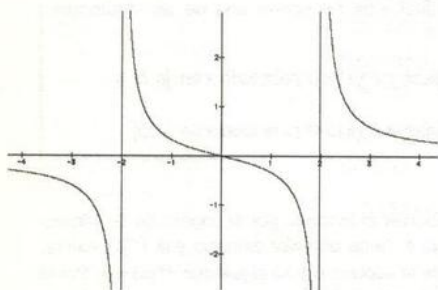
- $f''(x) > 0$ para todo x en $]-2, 0[$ o en $]2, \infty[$ y
- $f''(x) < 0$ para todo x en $]-\infty, -2[$ o en $]0, 2[$

entonces f es cóncava hacia arriba en $]-2, 0[$ y en $]2, \infty[$, y es cóncava hacia abajo en $]-\infty, -2[$ y en $]0, 2[$.

En 2 y en -2 se observan cambios de concavidad; no obstante ello, f no tiene inflexión en esos puntos, porque f no es continua en ellos.

Así que, el único punto de inflexión es $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Calculando los límites de la función f en los puntos en que la derivada f' no existe y en ∞ y $-\infty$, se obtienen las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de f lo cual está enseguida.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2, x < -2} \frac{x}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2, x > -2} \frac{x}{x^2 - 4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2, x < 2} \frac{x}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2, x > 2} \frac{x}{x^2 - 4} = +\infty$$

¿Cuáles son las asíntotas de f ?

Ejercicios 6.5

En cada ejercicio, determine los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la función y dibuje su gráfica.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

2. $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$

3. $f(x) = x^3 - 4x$

4. $f(x) = (1 - x^3)^2$

5. $f(x) = \frac{x}{4}\sqrt{16-x^2}$

6. $f(x) = x^{2/3} - x$

7. $f(x) = \frac{x^2+2}{x}$

8. $f(x) = \frac{1}{x^3-1}$

9. $f(x) = \frac{x}{x^4-1}$

10. $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$

11. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $f(x) = \arctan x$

13. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

14. $f(x) = \operatorname{arccot} x$

15. $f(x) = \arccos x$

16. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$

17. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

18. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

19. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

20. $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

21. $y = \sqrt{x^3-1}$

22. $y = \sqrt{x^2-1}$

23. $y = \frac{\ln|x^2-1|}{x}$

24. $y = \frac{-x^4 - x^2x}{(x^3-1)^2}$

25. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 1$

6.6

Trazo de gráficas

Para graficar eficazmente una función f , se analiza de ella lo siguiente:

1. Simetrías
2. Continuidad y asíntotas
3. Puntos críticos y monotonía
4. Máximos y mínimos locales
5. Concavidades y puntos de inflexión
6. Intersecciones con los ejes
7. Trazo de la gráfica

Ejemplo 1

Graficar la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$

Solución

1. Simetrías de f .

- f no es función par, por lo tanto f no es simétrica respecto al eje y .
- f es impar porque

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = \frac{-x^3}{1-x^2} = -f(x)$$

Entonces, f es simétrica respecto al origen. Por esto, si se prefiere es suficiente dibujar la gráfica a la derecha del origen; para luego extenderla en forma simétrica respecto al mencionado origen.

2. Continuidad y asíntotas de f .

- f es discontinua únicamente en $x=1$ y en $x=-1$. Se determinan los límites de la función a la izquierda y a la derecha en cada una de sus discontinuidades. Por simetría, únicamente se calcularán dichos límites en $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ 0 < x < 1}} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{1^+}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ 1 < x < 2}} \frac{x^3}{1-x^2} = \frac{1^+}{0^-} = -\infty$$

- **Asíntotas horizontales**

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ no existen; entonces la gráfica de f no tiene asíntotas horizontales.

- **Asíntotas verticales**

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty$, entonces $x=1$ es una asíntota vertical y

como $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty$, entonces $x=-1$ es también una asíntota vertical de la gráfica de f .

- **Asíntotas oblicuas**

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2}$$

Entonces, $y = f(x) \rightarrow -x$ cuando $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$. De ello se sigue que, la recta $y = -x$ es una asíntota oblicua de la gráfica de f .

3. Puntos críticos y monotonía de f .

$$f'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

Entonces $f'(1)$ y $f'(-1)$ no existen, además

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(3-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = \sqrt{3} \text{ o } x = -\sqrt{3}$$

Así que, los únicos puntos críticos de f son 0 , $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, 1 y -1

- **Intervalos en donde f crece.**

Como $f'(x) > 0$ para todo x en cualquiera de los intervalos $]-\sqrt{3}, -1[$, $]-1, 1[$ o en $]1, \sqrt{3}[$, entonces f es creciente en ellos.

- **Intervalos en donde f decrece.**

Como $f'(x) < 0$ para todo x en $]-\infty, -\sqrt{3}[$ o en $]\sqrt{3}, \infty[$, entonces f es decreciente en $]-\infty, -\sqrt{3}[$ [y en $]\sqrt{3}, \infty[$

4. Máximos y mínimos locales de f .

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1 - x^2)^3}$$

Evaluando f'' en los puntos críticos en los que la derivada de f es cero, se obtiene que

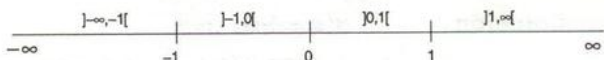
- $f''(\sqrt{3}) < 0$. Entonces, f tiene un máximo local en $x = \sqrt{3}$
- $f''(-\sqrt{3}) > 0$. entonces f tiene un mínimo local en $x = -\sqrt{3}$

5. Concavidades y puntos de inflexión de f .

$f''(1)$ y $f''(-1)$ no existen. Además

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x^2 + 3 = 0$$

Pero $x^2 + 3 > 0$, entonces $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Así que, los únicos puntos críticos de f' son 0, 1 y -1. Estos puntos determinan los intervalos de concavidad de f .



- *Intervalos de concavidad hacia arriba.*

Como $f''(x) > 0$ para todo x en $]-\infty, -1[$ o en $]0, 1[$, entonces f es cóncava hacia arriba en $]-\infty, -1[$ y en $]0, 1[$

- *Intervalos de concavidad hacia abajo.*

Como $f''(x) < 0$ para todo x en $]-1, 0[$ o en $]1, \infty[$, entonces f es cóncava hacia abajo en $]-1, 0[$ y en $]1, \infty[$

- *Puntos de inflexión.*

El único punto de inflexión de la gráfica de f es $(0, f(0)) = (0, 0)$.

6. Intersecciones con los ejes.

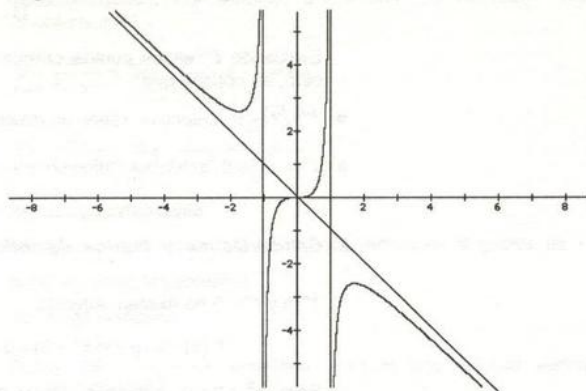
- Para encontrar la intersección de la gráfica de f con el eje y , se calcula $f(0)$. En este caso, $f(0) = 0$. Por lo que, la gráfica de f corta al eje y en $y = 0$
- Para encontrar la intersección de la gráfica de f con el eje x , se resuelve la ecuación $f(x) = 0$. En este caso

$$\frac{x^3}{1 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Por lo que, la gráfica de f corta al eje x en $x = 0$

7. Gráfica de f .

La gráfica de f es como sigue:



Ejemplo 2

Graticar $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4x - x^3}$

Solución

1. Simetrías de f .

Como $f(x) \neq f(-x) = -f(x)$, entonces la función f es simétrica respecto al origen y no es simétrica respecto al eje y .

2. Continuidad y asíntotas de f .

- f es discontinua únicamente en $x = 0$, $x = 2$ y $x = -2$. Los límites a la izquierda y a la derecha en estos puntos son

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 1}{4x - x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 1}{4x - x^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{4x - x^3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{4x - x^3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{4x - x^3} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{4x - x^3} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

- Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{4x - x^3} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

Así que, $y = f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$. Entonces, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f .

- Asíntotas verticales.

Como $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 1}{4x - x^3} = -\infty$, entonces la recta $x = -2$ es una asíntota vertical de la gráfica de f .

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{4x - x^3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$, entonces la recta $x = 0$ es una asíntota vertical de la gráfica de f .

Como $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{4x - x^3} = \frac{3}{0^+} = +\infty$, entonces, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical de la gráfica de f .

● **Asíntotas oblicuas.**

No hay asíntotas oblicuas, porque $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4x - x^3}$ es una función racional en la que el grado del numerador no es una unidad mayor que el grado del denominador.

3. Puntos críticos y monotonía de f .

$$f'(x) = \frac{x^4 + x^2 + 4}{x^2(4 - x^2)^2}$$

Entonces, $f'(0)$, $f'(2)$ y $f'(-2)$ no existen. Además:

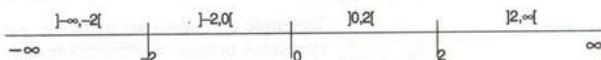
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 + z + 4 = 0 \text{ con } z = x^2$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 + \sqrt{-15}}{2} \text{ o } z = \frac{-1 - \sqrt{-15}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{-1 + \sqrt{-15}}{2} \text{ o } x^2 = \frac{-1 - \sqrt{-15}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{-15}}{2}} \text{ o } x = \pm \sqrt{\frac{-1 - \sqrt{-15}}{2}}$$

Estos valores de x no son números reales. Así que, $f'(x) \neq 0$ para todo x en $]-\infty, \infty[$. Por lo que, los únicos puntos críticos de f son 0 , 2 y -2 , los cuales determinan los intervalos de monotonía creciente o decreciente de f .



● **Intervalos en donde f crece.**

Como $x^4 + x^2 + 4 > 0$ y $x^2(4 - x^2)^2 > 0$ para todo x en $]-\infty, \infty[$,

entonces $f'(x) = \frac{x^4 + x^2 + 4}{x^2(4 - x^2)^2} > 0$ para todo x en cualquiera de los

intervalos $]-\infty, -2[$, $]-2, 0[$, $]0, 2[$ o $]2, \infty[$. De donde, f crece en $]-\infty, -2[$, $]-2, 0[$, $]0, 2[$ y $]2, \infty[$.

● **Intervalos en donde f es decreciente.**

No hay intervalos en donde f es decreciente, porque $f'(x) > 0$ para todo x en el $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f'} =]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, 2[\cup]2, \infty[$

4. Máximos y mínimos locales de f .

No hay máximos ni mínimos locales, porque f es creciente en todo su dominio.

5. Concavidades y puntos de inflexión.

Para determinar las concavidades y los puntos de inflexión de la gráfica de f , se resuelve $f''(x) = 0$

$$f''(x) = \frac{2(x^6 + 6x^4 + 12x^2 - 16)}{x^3(4 - x^2)^3} = 0 \Leftrightarrow x^6 + 6x^4 + 12x^2 - 16 = 0$$

Esta última ecuación, no tiene raíces racionales, porque si hubiera una, ella sería un número entero divisor de -16 , pero ningún divisor de -16 satisface dicha ecuación. No obstante, considerando

$$g(x) = x^6 + 6x^4 + 12x^2 - 16$$

se obtiene que $g(0) = -16$ y $g(1) = 3$, entonces por el teorema del valor intermedio, dicha ecuación tiene una raíz irracional x_0 entre 0 y 1. Por lo que $f''(x_0) = 0$. Entonces $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión. Además por ser f simétrica respecto al origen, también $(-x_0, f(-x_0))$ es punto de inflexión.

El valor $0 < x_0 < 1$ se calcula aproximadamente por el método de Newton como sigue

$$x_0 \approx 1 - \frac{g(1)}{g'(1)} = 1 - \frac{3}{54} = \frac{51}{54} \approx 0.9444$$

Una mejor aproximación de x_0 se obtiene continuando con el método sucesivamente, así

$$x_0 \approx \frac{51}{54} - \frac{g\left(\frac{51}{54}\right)}{g'\left(\frac{51}{54}\right)} \approx 0.9404$$

Tomando en cuenta las asíntotas y la monotonía creciente de f junto con estos puntos de inflexión se obtiene que:

- f es cóncava hacia arriba en $]-\infty, -2[$, $]-x_0, 0[$ y $]x_0, 2[$ con $x_0 \approx 0.9404$.
- f es cóncava hacia abajo en $]-2, -x_0[$, $]0, x_0[$ y $]2, \infty[$ con $x_0 \approx 0.9404$.

6. Intersecciones con los ejes.

$$\bullet \quad y = f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{4x - x^3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o } x = -1$$

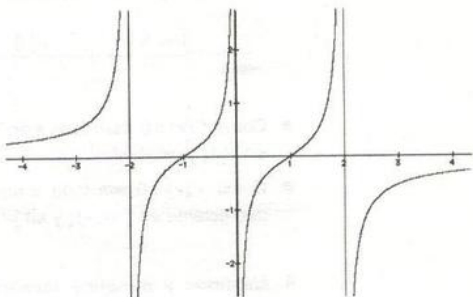
Así que, la gráfica de f corta al eje x en 1 y en -1 .

- $f(0)$ no existe, entonces la gráfica de f no corta al eje y .

7. Gráfica de f .

Con la información de los seis puntos anteriores, la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{4x - x^3} \text{ queda como sigue:}$$



Ejemplo 3

$$\text{Graficar } y = \frac{1}{1 - x^2}$$

Solución

1. Simetrías de f .

La función $y = f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$ es función par, entonces es simétrica respecto al eje y .

2. Continuidad y asíntotas de f .

f es discontinua en 1 y en -1 . Además:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{1 - x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1 - x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 - x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - x^2} = 0$$

Entonces:

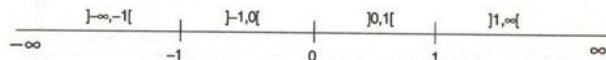
- Las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales de f .
- La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de f .
- No hay asíntotas oblicuas, porque en $\frac{1}{1 - x^2}$ el grado del denominador no es una unidad menor que el grado del numerador.

3. Puntos críticos y monotonía de f .

$$y' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

Entonces:

- Los únicos puntos críticos de f son 0, 1 y -1



- Como $f'(x) > 0$ para todo x en $]0, 1[$ o en $]1, \infty[$, entonces f es creciente en $]0, 1[$ y en $]1, \infty[$
- Como $f'(x) < 0$ para todo x en $]-\infty, -1[$ o en $]-1, 0[$, entonces f es decreciente en $]-\infty, -1[$ y en $]-1, 0[$

4. Máximos y mínimos locales de f .

- No hay máximos locales.
- Como $f'(x) < 0$ para todo x en $]-1, 0[$ y $f'(x) > 0$ para todo x en $]0, 1[$, entonces f tiene un mínimo local en $x = 0$

5. Concavidades y puntos de inflexión de f .

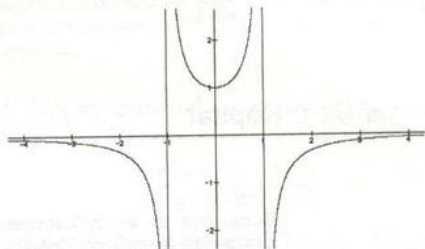
$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 1)}{(1-x^2)^3}$$

Nótese que $f''(1)$ y $f''(-1)$ no existen. Además $f''(x) \neq 0$ para todo x en cualquiera de los intervalos $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ o $]1, \infty[$. Entonces los únicos puntos críticos de f' son 1, y -1. Así que, los intervalos de concavidad de f son $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ y $]1, \infty[$

- Como $f''(x) > 0$ para todo x en $]-1, 1[$, entonces f es cóncava hacia arriba en $]-1, 1[$
- Como $f''(x) < 0$ para todo x en cualquiera de los intervalos $]-\infty, -1[$ o $]1, \infty[$, entonces f es cóncava hacia abajo en $]-\infty, -1[$ y en $]1, \infty[$
- No hay puntos de inflexión, porque $f''(x) \neq 0$ para $x \neq \pm 1$ en $]-\infty, \infty[$

6. Intersecciones con los ejes.

- La gráfica de f no interseca al eje x , porque $y = \frac{1}{1-x^2} \neq 0$ para todo $x \neq \pm 1$ en $]-\infty, \infty[$
- En este caso $f(0) = 1$. Entonces, la gráfica de f interseca al eje y en $y = 1$; o sea, pasa por el punto $(0, f(0)) = (0, 1)$ del eje y .

7. Gráfica de f .**Ejercicios 6.6**

En los ejercicios del 1 al 35, dibuje la gráfica de cada función determinando:

- Simetrías.
- Continuidad y asíntotas.
- Puntos críticos e intervalos de monotonía.
- Máximos y mínimos locales.
- Puntos de inflexión e intervalos de concavidad.
- Intersecciones con los ejes.

- $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 4$
- $y = x^4 + 2x^3 + x^2 - 4$
- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
- $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 13$
- $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
- $y = x^4 - 8x^2 + 7$
- $y = \frac{x}{x^4 - 1}$
- $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 68$
- $y = \frac{1}{x^4 - 1}$
- $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$
- $y = \frac{(x-1)^3}{x^2 - 2x}$
- $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$
- $y = \frac{x-1}{4x - x^3}$
- $y = \frac{4-x^3}{x^2}$
- $y = \frac{x^2}{x^3 - 1}$
- $y = \frac{x^2 + 1}{x}$
- $y = (x-1)^{2/3}$
- $y = \frac{x^2}{x^4 - 1}$
- $y = \ln|x^2 - 1|$
- $y = \frac{\ln|x^2 - 1|}{x}$
- $y = \sqrt{|x^2 - 1|}$
- $y = x\sqrt{x+1}$
- $y = \frac{x}{x^2 + 1}$
- $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
- $y = \frac{x}{1-x^2}$
- $y = \frac{(x-1)^3}{2x-4}$
- $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$
- $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$
- $y = \frac{1}{(x+1)^2}$
- $y = \frac{x^3 + 1}{x}$
- $y = \frac{1}{x^2 + 1}$
- $y = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$

$$34. y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x}$$

$$35. y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

6.7 La regla de L'Hôpital

Como otra de las aplicaciones de la derivada; en esta sección, se establecerá la regla de L'Hôpital con la cual se obtendrá un método para calcular límites de formas indeterminadas.

Para establecer la regla de L'Hôpital primero se establecerá el siguiente teorema del matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

Segundo teorema del valor medio

Supóngase que f y g son funciones tales que:

1. f y g son continuas en $[a, b]$ con $a \neq b$
2. f y g son diferenciables en $]a, b[$
3. $g'(x) \neq 0$ para todo x en $]a, b[$

Entonces, existe un punto c en $]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demostración

Por el teorema del valor medio, existe x_0 en $]a, b[$ tal que

$$g(b) - g(a) = g'(x_0)(b - a)$$

De la hipótesis 3 y el hecho de que $a \neq b$, se sigue que $g(b) - g(a) \neq 0$. Entonces, tiene sentido definir una función h en $[a, b]$ como sigue

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

De las hipótesis 1 y 2, se sigue que h es continua en $[a, b]$ y diferenciable en $]a, b[$. Además $h(a) = 0 = h(b)$, entonces por el teorema de Rolle se tiene que existe c en $]a, b[$ tal que $h'(c) = 0$. Por otra parte:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

Por lo que, $0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$. De donde

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$



Nótese que el teorema del valor medio es un caso particular del segundo teorema del valor medio (de Cauchy), ello puede verse tomando g como la función idéntica.

Ejemplo 1

Si $f(x) = x^2 - 3x - 2$ y $g(x) = 3x^2 + x - 2$, encontrar los números c en $] -1, 1[$ tales que

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Solución

$f'(x) = 2x - 3$ y $g'(x) = 6x + 1$. Entonces $f'(c) = 2c - 3$ y $g'(c) = 6c + 1$. Por lo que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{2c - 3}{6c + 1}$$

Por otra parte, $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{-4 - 2}{2 - 0} = -3$. Así que

$$\frac{2c - 3}{6c + 1} = -3 \Leftrightarrow 2c - 3 = -3(6c + 1) \Leftrightarrow 20c = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

Regla de L'Hôpital

(forma $\frac{0}{0}$ con

a en $]-\infty, \infty[$)

Supóngase que f y g son funciones tales que

1. f y g son diferenciables en $]a - \delta, a + \delta[$ para $\delta > 0$ excepto quizá en a

2. $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ en $]a - \delta, a + \delta[$

3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe

Entonces, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Demostración

Primero se demostrará que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Para ello, considérense F y G funciones definidas como sigue

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

De las hipótesis 1 y 3 se sigue que, para cada x en $]a, a + \delta[$ F y G son continuas en $[a, x]$ y diferenciables en $]a, x[$. Entonces, tres cosas:

- Por el teorema del valor medio, para cada x en $]a, a + \delta[$ existe c en $]a, x[$ tal que

$$G(x) - G(a) = G'(c)(x - a)$$

y como $G'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ en $]a - \delta, a + \delta[$ y $x > a$, entonces $G(x) \neq 0$ para todo x en $]a, a + \delta[$

- Por el segundo teorema del valor medio, para cada x en $]a, a + \delta[$ existe y en $]a, x[$ tal que

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(y)}{G'(y)}$$

- Además $f'(x) = F'(x)$ y $g'(x) = G'(x)$ para cada $x \neq a$

Así que, de los tres puntos anteriores se sigue que, para cada x en $]a, a + \delta[$ existe y en $]a, x[$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

De donde, $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \lim_{y \rightarrow a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pero $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

En forma similar se demuestra que $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Así que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Ejemplo 2

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x}$

Solución

Nótese que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x}$ es un límite indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$. O sea

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} = \frac{0}{0}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, entonces para calcular el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x}$ se usa la regla de L'Hôpital. Observe:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{1} = -1$$

Regla de L'Hôpital

(forma $\frac{0}{0}$ con $a = \pm\infty$)

Supóngase que f y g son función tales que

1. f y g son diferenciables para todo $x > N$ para algún $N > 0$
2. $g'(x) \neq 0$ para todo $x > N$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe

$$\text{Entonces, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nota: La regla también es válida si en este enunciado se reemplazan $x \rightarrow +\infty$ y $x > N$ respectivamente por $x \rightarrow -\infty$ y $x < -N$

Demostración

Considérese $x = \frac{1}{y}$ ($y \neq 0$). Entonces, por la regla de L'Hôpital cuando $x \rightarrow a$ con a en $]-\infty, \infty[$ se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dy} f\left(\frac{1}{y}\right)}{\frac{d}{dy} g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y}\right)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

En este caso, $x \rightarrow \infty$ interprétese indistintamente como $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$

Ejemplo 3

1^∞

Calcular el $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$

Solución

Supóngase que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = L$. Entonces, por ser $\ln$ una función continua se tiene que

$$\begin{aligned} \ln L &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} \quad (\text{forma } \frac{0}{0} \text{ de la regla de L'Hôpital cuando } x \rightarrow \pm\infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2}{x^3}}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

Así que $\ln L = 0$. De donde, $L = e^0 = 1$. O sea, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = 1$

Nota

La técnica usada en el ejemplo 3 se aplica siempre que, la función $\ln$ se evalúe en números positivos como lo fue $1 + \frac{1}{x^2}$ en dicho ejemplo.

Enseguida se enuncia la regla de L'Hôpital en sus modalidades para las formas $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$ e $\frac{\infty}{\infty}$; en tales casos, la demostración de la regla será omitida por no corresponder a los objetivos de este texto.

Regla de L'Hôpital

(formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ e $\frac{\infty}{\infty}$)

con a en $]-\infty, \infty[$)

Supóngase que f y g son funciones tales que

1. f y g son diferenciables en $]a - \delta, a + \delta[$ para todo $\delta > 0$ excepto quizá en a .
2. $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ en $]a - \delta, a + \delta[$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, -\infty$ o ∞ , $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty, -\infty$ o ∞
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe

$$\text{Entonces, } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla también es válida si en el enunciado se reemplaza $x \rightarrow a$ por $x \rightarrow a^+$ en $]a, a + \delta[$ o por $x \rightarrow a^-$ en $]a - \delta, a[$ y/o se reemplaza "existe" por $= +\infty, -\infty$ o ∞

Regla de L'Hôpital

(formas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ e $\frac{\infty}{\infty}$)

con $a = \pm\infty$)

Supóngase que f y g son funciones tales que

1. f y g son diferenciables para todo $x > N$ para algún $N > 0$
2. $g'(x) \neq 0$ para todo $x > N$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, -\infty$ o ∞ , $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, -\infty$ o ∞
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe

$$\text{Entonces, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla también es válida si en el enunciado se reemplaza $x \rightarrow +\infty$ por $x \rightarrow -\infty$ y $x > N$ por $x < -N$, y/o se reemplaza "existe" por $= +\infty, -\infty$ o ∞

Formas indeterminadas $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0

Ejemplo 4

$$\frac{0}{0}$$

Solución

Calcular el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

Por la regla de L'Hôpital se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

Ejemplo 5

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Método 1

Calcular el $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt{x-1}}$

(Haciendo operaciones algebraicas)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3x+2}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3 + \frac{5}{x-1}} = \sqrt{3}$$

Método 2

(Por cambio de variable $x = \frac{1}{y}$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3\left(\frac{1}{y}\right)+2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{y}\right)-1}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{3+y}{y}}}{\sqrt{\frac{1-y}{y}}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+y}}{\sqrt{1-y}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = \sqrt{3}$$

Ejemplo 6

$$\infty - \infty$$

Solución

Calcular el $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})$

Se hace el cambio de variable $x = \frac{1}{y}$ y se aplica la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{y} - \sqrt{\frac{1}{y}} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{y} - y}{y^{3/2}} \quad (\text{forma } \frac{0}{0})$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}} - 1}{\frac{3}{2}y^{1/2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - 2\sqrt{y}}{3y} = \frac{1}{0} = \infty$$

Ejemplo 7

$$0 \cdot \infty$$

Solución

Calcular el $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cot x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cot x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{\frac{1}{x}} \quad (\text{forma } \frac{\infty}{\infty})$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\csc^2 x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\sin^2 x} \quad (\text{forma } \frac{0}{0}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{2\sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sin 2x} \quad (\text{forma } \frac{0}{0}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{2\cos x} = \frac{2}{(2)(1)} = 1
 \end{aligned}$$

Ejemplo 8
 0^0 **Solución**Calcular el $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$ Supóngase que $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = L$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 \ln L &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln (\sin x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln (\sin x)}{\frac{1}{x}} \quad (\text{forma } \frac{\infty}{\infty} \text{ de la regla de L'Hôpital}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0
 \end{aligned}$$

Así que $\ln L = 0$. De donde, $L = e^0 = 1$. O sea, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = 1$ **Ejemplo 9**
 1^∞ **Solución**Calcular el $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{1/x}$ Supóngase que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{1/x} = L$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 \ln L &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{1/x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{1+e^x}{2} \right)}{x} \quad (\text{forma } \frac{0}{0}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} e^x}{\frac{1}{1+e^x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Así que $\ln L = \frac{1}{2}$. De donde $L = e^{1/2}$. O sea, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{1/x} = e^{1/2}$

Ejemplo 10 ∞^0 Calcular el $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^x)^{1/x}$ **Solución**Supóngase que $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^x)^{1/x} = L$. Entonces:

$$\begin{aligned} \ln L &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^x)^{1/x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln (1 + e^x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \quad \left(\text{forma } \frac{\infty}{\infty} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

Así que, $\ln L = 1$. De donde $L = e^1 = e$. O sea, $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + e^x)^{1/x} = e$ **Ejercicios 6.7**

En los ejercicios del 1 al 31, calcule el límite.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

2. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t^2}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{2x^3 - x - 1}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x}$

6. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x} \right)$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+1}}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2}$

11. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos 2\pi x}{1 - x}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right)$

13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cos \frac{1}{x}$

14. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan 2x}{1 - \cos x}$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4 - 3x^3}$

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - x}$

17. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \right)$

18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x}{\cot^2 x}$

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\csc x - \frac{1}{x} \right)$

20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{1 - \cos \frac{1}{x}}$

21. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

22. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

23. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$

24. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x}$

25. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\csc x)^x$

26. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x}$

27. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^x}{e^x}$

28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + e^x}}{\sqrt{2 + e^x}}$

29. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\ln x}$

30. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$

31. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^x$

6.8 El teorema de Taylor

En el siguiente teorema se establece una fórmula para aproximar el valor $f(x)$ de una función f que tiene $n+1$ derivadas.

Teorema de Taylor

Supóngase que las $n+1$ derivadas de una función f existen en un intervalo $]c-\delta, c+\delta[$ para algún número c y algún $\delta > 0$. Entonces, para cada $x \neq c$ en $]c-\delta, c+\delta[$ existe un número ξ entre x y c tal que

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

A esta expresión se le llama *fórmula de Taylor*

Demostración

Para cada $x \neq c$ en $]c-\delta, c+\delta[$ considérese el polinomio $P_n(x)$ definido como sigue

$$P_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

y considérese una función g definida en $]c-\delta, c+\delta[$ como

$$g(z) = f(z) - f(c) - \frac{f'(c)}{1!}(z-c) - \frac{f''(c)}{2!}(z-c)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n - R_n(x) \frac{(z-c)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}}, \text{ con } x \neq c$$

en donde $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

Como las $n+1$ derivadas de f existen en $]c-\delta, c+\delta[$, entonces para cada $x \neq c$ en $]c-\delta, c+\delta[$ se tiene que:

- g es continua en x , c y en puntos entre x y c
- g es diferenciable en puntos entre x y c
- $g(x) = f(x) - f(c) - 0 - 0 - \dots - 0 - 0 = 0$

$$g(c) = f(c) - P_n(c) - R_n(c) \frac{(c-c)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}} = R_n(c) - R_n(c) = 0$$

Entonces por el teorema de Rolle, existe ξ entre x y c tal que $g'(\xi) = 0$
Por otra parte

$$g'(z) = -f'(z) + \frac{f'(z)}{1} - \frac{f''(z)}{1}(x-z) + \frac{f''(z)}{1}(x-z) \\ - \frac{f^{(3)}(z)}{2!}(x-z)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1} \\ - \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n + R_n(x)(n+1) \frac{(x-z)^n}{(x-c)^{n+1}}$$

De donde, $g'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n + R_n(x)(n+1) \frac{(x-z)^n}{(x-c)^{n+1}}$. Por lo que

$$0 = g'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + R_n(x)(n+1) \frac{(x-\xi)^n}{(x-c)^{n+1}}$$

De donde, $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$. Y como $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, entonces $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$. O sea

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

para algún ξ entre x y c . □

Nota 1

$P_n(x)$ se llama el *polinomio de Taylor* de grado n de la función f en el número c .

$R_n(x)$ se llama *residuo* y la expresión $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$ se llama *forma de Lagrange del residuo*.

Nota 2

Cuando $n=0$, $x=b$ y $c=a$, la fórmula de Taylor se reduce a

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$$

con ξ entre a y b , lo cual es la conclusión del teorema del valor medio.

Ejemplo 1

Solución

Encontrar $P_3(x)$ y $R_3(x)$ de la función $f(x) = \sin x$ en $c=0$

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 \\ = \sin 0 + \frac{\cos 0}{1}x - \frac{\sin 0}{2!}x^2 - \frac{\cos 0}{3!}x^3 = x - \frac{1}{6}x^3$$

O sea, $P_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3$. Y como $f^{(4)}(x) = \sin x$, entonces

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-0)^4 = \frac{\sin \xi}{24}x^4$$

en donde ξ es un número entre 0 y x . Pero $|\sin \xi| \leq 1$, entonces

$$R_3(x) \leq |R_3(x)| = \frac{1}{24} |\sin \xi| x^4 \leq \frac{1}{24} x^4$$

O sea, $R_3(x) \leq \frac{1}{24} x^4$

Ejemplo 2

Utilizar la fórmula de Taylor con $P_3(x)$ para obtener un valor aproximado de $\cos 33^\circ$ y estimar el error $|R_3(x)|$ cometido en la aproximación.

Solución

$33^\circ \sim \frac{11\pi}{60}$ radianes. Como $\frac{11\pi}{60} = \frac{10\pi}{60} + \frac{\pi}{60} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{60}$, tómesese $c = \frac{\pi}{6}$ y

$f(x) = \cos x$. Entonces el polinomio de Taylor $P_3(x)$ de f en $c = \frac{\pi}{6}$ es

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{f^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 \\ &= \cos \frac{\pi}{6} - \left(\sin \frac{\pi}{6}\right) \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{2!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{3!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 \end{aligned}$$

$$\text{De donde, } P_3(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$$

El residuo $R_3(x)$ es

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 = \frac{\cos \xi}{24} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4$$

Como $f(x) = P_3(x) + R_3(x)$, entonces $f(x) = P_3(x)$ con un error

$$|R_3(x)| = \left| \frac{\cos \xi}{24} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 \right| = \frac{1}{24} |\cos \xi| \left|x - \frac{\pi}{6}\right|^4 \leq \frac{1}{24} \left|x - \frac{\pi}{6}\right|^4$$

De donde, $\cos 33^\circ = \cos \frac{11\pi}{60} = f\left(\frac{11\pi}{60}\right) \approx P_3\left(\frac{11\pi}{60}\right)$ con un error

$$\left| R_3\left(\frac{11\pi}{60}\right) \right| \leq \frac{1}{24} \left(\frac{11\pi}{60} - \frac{\pi}{6}\right)^4 = \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{60}\right)^4 \approx 0.0000003$$

Si se toma $\frac{\pi}{60} = 0.05236$, entonces

$$P_3\left(\frac{11\pi}{60}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{60}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\pi}{60}\right)^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{\pi}{60}\right)^3 \approx 0.8386702$$

$$R_3\left(\frac{11\pi}{60}\right) \leq \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{60}\right)^4 \approx 0.0000003$$

De donde, $\cos 33^\circ \approx P_3\left(\frac{11\pi}{60}\right) \approx 0.8386702$

Ejemplo 3Calcular $\sqrt[3]{e}$ con un error menor que 10^{-3} **Solución**

Nótese que $\sqrt[3]{e} = e^{1/3}$. Entonces $\sqrt[3]{e}$ se aproxima con la fórmula de Taylor para $f(x) = e^x$ y $c = 0$ (se toma $c = 0$ por el hecho de que $e^0 = 1$ lo cual facilita las cosas). Observe:

$$\begin{aligned} e^x &= P_n(x) + R_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + R_n(x) \\ &= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \end{aligned}$$

en donde $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$ con ξ entre 0 y x . En este caso $x = \frac{1}{3}$ porque se está calculando $\sqrt[3]{e} = e^{1/3}$, por lo que $0 < \xi < \frac{1}{3}$. Por ser la exponencial una función creciente se tiene

$$0 < \xi < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow 1 = e^0 < e^\xi < e^{1/3} < e^1 = e < 3$$

Enseguida se da un valor inicial a n , digamos $n = 4$. Para $n = 4$ y $x = \frac{1}{3}$ el error $\left| R_4\left(\frac{1}{3}\right) \right|$ es tal que

$$\left| R_4\left(\frac{1}{3}\right) \right| = \left| \frac{e^\xi}{5!} \left(\frac{1}{3}\right)^5 \right| = \frac{e^\xi}{3^5 \cdot 5!} < \frac{3}{3^5 \cdot 5!} = \frac{1}{9720} = 0.000103 < 0.001 = 10^{-3}$$

Se observa que para $n = 4$ el error resultó menor que 10^{-3} como se pide en el ejemplo (si hubiese resultado $\left| R_4\left(\frac{1}{3}\right) \right| \geq 10^{-3}$ se toma $n = 5, 6, \dots$ etc. hasta encontrar un valor para n tal que $\left| R_n\left(\frac{1}{3}\right) \right| < 10^{-3}$). Así que

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{e} = e^{1/3} &\approx P_4\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2 2!} + \frac{1}{3^3 3!} + \frac{1}{3^4 4!} \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{162} + \frac{1}{1944} \approx 1.3956 \end{aligned}$$

Ejemplo 4Demostrar que $\ln x^2 < x^2 - 1$ para todo $x > 1$ **Solución**

Considérense $f(x) = \ln x$, el polinomio de Taylor $P_1(x)$ de f en $c = 1$ y el correspondiente residuo de Lagrange $R_1(x)$. Entonces

$$\ln x = f(x) = P_1(x) + R_1(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1}(x-1) + R_1(x) = (x-1) + R_1(x)$$

en donde $R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-1)^2 = -\frac{(x-1)^2}{2\xi^2}$ con $1 < \xi < x$. Entonces

$0 < \frac{1}{\xi} < 1$. De donde $0 < \frac{1}{\xi^2} < 1$. Por lo que

$$R_1(x) \leq |R_1(x)| = \left| -\frac{(x-1)^2}{2\xi^2} \right| = \left| -\frac{1}{2} \left| \frac{1}{\xi^2} \right| (x-1)^2 \right| = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{\xi^2} \right) (x-1)^2 < \frac{(x-1)^2}{2}$$

O sea $R_1(x) < \frac{(x-1)^2}{2}$. De donde

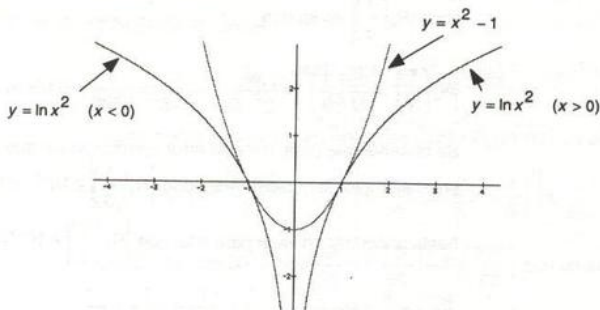
$$\begin{aligned} \ln x &= P_1(x) + R_1(x) < P_1(x) + \frac{(x-1)^2}{2} = x - 1 + \frac{(x-1)^2}{2} \\ &= \frac{2(x-1) + (x-1)^2}{2} = \frac{(x-1)(x+1)}{2} = \frac{x^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

Es decir $\ln x < \frac{x^2 - 1}{2}$. Por último

$$\ln x < \frac{x^2 - 1}{2} \Leftrightarrow 2 \ln x < x^2 - 1 \Leftrightarrow \ln x^2 < x^2 - 1$$

Comentario

En general $\ln x^2 \leq x^2 - 1$ para todo $x \neq 0$ en $]-\infty, \infty[$ como lo muestra la gráfica adjunta.



Ejercicios 6.8

En los ejercicios del 1 al 15, encuentre el polinomio de Taylor $P_n(x)$ de la función f en el número c con el valor de n dado.

1. $f(x) = 1 + x - x^5$, $c = 1$, $n = 4$

2. $f(x) = x^4 - 1$, $c = 0$, $n = 3$

3. $f(x) = \arctan x$, $c = 0$, $n = 3$

4. $f(x) = e^x$, $c = 0$, $n = 7$

5. $f(x) = \ln x$, $c = 1$, $n = 9$

6. $f(x) = \frac{1}{x}$, $c = 1$, $n = 5$

7. $f(x) = \sin x$, $c = 0$, $n = 8$

8. $f(x) = \cos x$, $c = \frac{\pi}{2}$, $n = 5$

9. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $c = 1$, $n = 6$

10. $f(x) = \operatorname{arccot} x$, $c=1$, $n=4$ 11. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $c=1$, $n=5$ 12. $f(x) = \ln(1+x)$, $c=0$, $n=5$
 13. $f(x) = \sqrt{1+x}$, $c=0$, $n=3$ 14. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $c=0$, $n=3$ 15. $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, $c=0$, $n=3$

Del 16 al 20, aproxime cada función f con su polinomio de Taylor $P_n(x)$ en c y el valor de n dados y determine el error $|R_n(x)|$ cometido en dicha aproximación en el intervalo que se indica.

16. $f(x) = e^x$, $c=0$, $n=6$, $0 \leq x \leq 1$ 17. $f(x) = \sqrt{x}$, $c=1$, $n=3$, $0 < x < 4$
 18. $f(x) = \ln x$, $c=1$, $n=3$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ 19. $f(x) = \cos x$, $c = \frac{\pi}{2}$, $n=4$, $0 < x < \pi$
 20. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $c=0$, $n=4$, $0 \leq x < \pi$

Del 21 al 30, con la fórmula de Taylor calcule cada número con la precisión que se indica.

21. $e^{1/2}$, con cuatro decimales 22. e , con cinco decimales
 23. $\ln(1.3)$ con error menor que 10^{-3} 24. $\operatorname{sen} 46^\circ$, con cuatro decimales
 25. $\cos 121^\circ$ con error menor que 10^{-5} 26. $\sqrt[5]{33}$ con error menor que 10^{-4}
 27. $\sqrt[3]{10}$ con cuatro decimales 28. $(1.05)^{-5}$ con tres decimales
 29. $\tan 44^\circ$ con cuatro decimales 30. $\sec 31^\circ$ con error menor que 10^{-5}
 31. Demuestre que $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ para todo x en $]-\infty, \infty[$
 32. Demuestre que $e^x < 1 + x + x^2$ para todo x en $]0, 1[$



RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS IMPARES

Ejercicios 1.1

1. $\{2,3\}$ 3. $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 5. $\{0,1,2\}$

Ejercicios 1.2

1. Rombo $\in A$ Rectángulo $\in A$ Trapecio $\in A$ Hexágono $\in A$ Cuadrado $\in A$ Triángulo $\in A$
 Pentágono $\in A$ Romboide $\in A$
 3. $1 \notin C, -1 \in C, 4 \in C, -4 \notin C, 2 \in C, -2 \notin C$ 5. $1, 2, 5, -5, 10$

Ejercicios 1.3

1. $\{6,12\}$ 3. $\left\{\frac{1}{2}, -3\right\}$ 5. $\{-1,0\}$ 7. $\{-5,5\}$ 9. $\left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ 11. $\{15,14\}$ 13. $\{1,2,3,\dots\}$
 15. $\{x; x \text{ es cuadrilátero}\}$ 17. $\{n \in \mathbb{N}; n \text{ es par}\}$ 19. $\{x; x^3 - x^2 = 0\}$ 21. $\left\{\frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}; n \in \mathbb{N}\right\}$ 23. $\{4,5\}$
 25. $A = U$

Ejercicios 1.4

1. $A = \emptyset$ 3. $C = \emptyset$ 5. $E = \emptyset$ 7. $G = \emptyset$ 9. $I = \emptyset$

Ejercicios 1.5

1. $\{1,2\}$ 3. $\{1\}$ 5. $\{1,-3\}$ 7. $\{1,2,3\}$ 9. $\emptyset$

Ejercicios 1.7

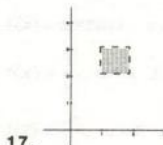
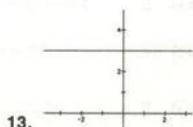
1. $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$ 3. $B \subset C$ 5. $A \subset D$ 7. $B \subset D$ 9. $C \subset A$ 11. $D \subset A$
 13. $C \subset D$ 15. $A \subset B$ y $B \subset A$ 17. $B \subset A$ y $A \subset B$

Ejercicios 1.8

21. a) No b) $A \subset B \subset C \subset D$ c) D d) Porque no contiene a los números irracionales entre 0 y 5.

Ejercicios 1.9

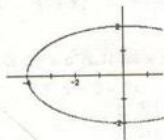
1. $\{c,d\}$ 3. $\{(c,a),(c,b),(d,a),(d,b)\}$ 5. $\{(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$
 7. $\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$



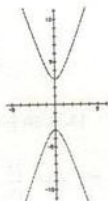
19.



21.



23.



Ejercicios 1.10

1. $\{a, b, c, d, e\}$ 3. $\{a, d, e\}$ 5. $]-2, 3[$ 7. $]0, 3]$ 9. $]-\infty, 1[$ 11. $\left\{0, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ 13. $\{1\}$ 15. B
 17. $]-2, 0]$ 19. $\emptyset$ 21. $[-1, 4[$ 23. $\{(3, b)\}$ 25. $\{(6, \sqrt{6})\}$ 27. $\{(0, 0), (2, 4)\}$ 29. $\{(0, 0), (3, 3)\}$
 31. $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ 33. $]2, 3[$ 35. $]-\infty, 0[\cup]3, \infty[$ 37. $]-\infty, -1] \cup]2, 4]$ 39. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 41. C 43. A
 45. $]-\infty, -3]$ 47. $\emptyset$ 49. C 51. $]-\infty, 2[$ 53. $]-\infty, -3] \cup \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 55. $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{2\}$ $C = \{3\}$
 57. $A^c = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $(A^c)^c = A$ 59. $]-\infty, 1] \cup]3, \infty[$ 61. $]-\infty, \infty[$ 63. $]0, 1] \cup]3, \infty[$ 65. $]1, 3]$ 67. A
 69. Sí 71. $\emptyset = \mathbb{R}^c$ 73. $A^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + x \leq y\}$ 75. $A = \{0\}$ 77. $A^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \text{ o } 2 \leq x\}$

Ejercicios 2.1

1. 1 2. $\frac{2}{3}$ 3. $\frac{2}{3}$ 4. 2 5. 5 6. 3 7. -2 8. 2 9. -4 10. $\frac{3}{2}$ 11. 0 12. $\frac{3}{2}$ 13. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$
 14. $-\frac{1}{2}$ 15. 1, -3 16. 2, -1 17. 3, 1 18. $1\frac{1}{2}$ 19. $1\frac{3}{8}$ 20. 0 21. $x=0, y=-1$ 22. No hay
 23. $x=4, 1; y=\frac{1}{2}, -1$ 24. $x=0, 1; y=-1, 0$ 25. $x=0, 1; y=-1, 0$ 26. $\frac{2x^2}{1-x^2}$ 27. $q=\frac{fp}{p-f}$ 29. $\frac{a}{3}$
 32. 650 16 28 33. 5m, 10m 34. 20 y 20 35. $4.5 \frac{m}{seg}$ y $4 \frac{m}{seg}$ 36. 280 km, 16:30 horas 37. Ella
 2 $\frac{km}{h}$. El 4 $\frac{km}{h}$ 38. a) $d = \sqrt{1000000t^2 - 800t + \frac{1}{4}}$ b) $t = 1.117634$ horas 39. $\frac{5}{4}$ 40. cajas 10, esferas 12
 41. 4 m

Ejercicios 2.2

1. $-\sqrt{2} < 0 < 0.099 < \frac{1}{5} < \frac{2}{7} < \frac{3}{9} < \frac{3}{8} < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \frac{9}{10} < 1$ 6. $x > 3$ 7. $x > -1$ 8. $x \leq -1$ 9. $-3 \leq x \leq 5$
 11. $-1 < x < 4$ 13. $\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$ 15. No hay solución 17. $x \leq -3$ o $3 \leq x$ 18. $-1 \leq x \leq 2$ 19. $x \leq -1$ o $3 \leq x$
 21. No hay solución 23. $x < 2$ 25. $x < -1$ 27. $\frac{4}{7} \leq x \leq 1$ 29. $1 < x$ 31. x en $]-\infty, \infty[$ 40. $\frac{9}{8}$ 41. $\frac{2}{3}$

Ejercicios 2.3

1. 4 2. $2 - \sqrt{2}$ 3. $2x - 1$ si $x \geq \frac{1}{2}$, $1 - 2x$ si $x < \frac{1}{2}$ 4. $1 - 2x$ 5. $(x+1)^2$ 7. $-\frac{2}{3}, -4$ 9. $\frac{5}{9}, \frac{3}{7}$
11. x en $]1, 3[$ 13. x en $] -3, -2[$ o x en $] -2, \infty[$ 15. x en $] -\infty, \infty[$ 17. x en $]1, 2[$ o x en $]6, 7[$ 19. x en $]\frac{7}{4}, 2[$ o x en $]\frac{9}{4}, \frac{9}{2}[$ 21. $]0, 2[$ 23. $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ 25. x en $]\frac{1}{5}, \frac{3}{8}[$ o x en $]\frac{9}{10}, 1[$

Ejercicios 2.4

9. $1.\bar{6}$ 11. -4.25 13. 6.2 15. 0.4145873 17. $8.1\bar{6}$ 19. $\frac{7}{1000}$ 21. $-\frac{2}{5}$ 23. $\frac{18}{55}$ 25. $\frac{53}{9}$
27. $\frac{3016}{999}$ 29. irracional 31. irracional 33. irracional 35. irracional 37. racional 47. $0, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{17}{4}, \frac{24}{5}, \frac{37}{6}$ 49. $0, \frac{5}{2}, -\frac{3}{8}, \frac{17}{4}, -\frac{24}{5}, \frac{37}{6}, -\frac{48}{7}, \frac{65}{8}, -\frac{80}{9}, \frac{101}{10}$ 51. $0, \frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \frac{15}{4}, \frac{24}{5}, \frac{35}{6}, \frac{48}{7}, \frac{63}{8}, \frac{80}{9}, \frac{99}{10}$ 53. 2.08
55. 37.8 57. 1.593×10^{11} 59. 7.8×10^{-4} 61. 7.521×10^{-6} 63. 178300 65. 7.43×10^{-6} 67. 0.04
69. $\frac{1}{400}$ 71. 72×10^{11} 73. 4.2×10^{-27} 75. 55.6×10^8

Ejercicios 2.5

1. Inferiores $-1, \frac{1}{2}, 0$. Superiores no tiene. 3. $0, 2$ 5. No existen 7. Acotado 9. No existen 11. $1, 0$
13. $\inf = 0$. No existe el sup. 15. No existen 17. $\sup = \frac{7}{30}$, $\inf = 0.2$ 19. $\sup = -\sqrt[3]{2}$. No existe el inf

Ejercicios 2.6

1. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 3. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots + \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{5}{4}}$
5. $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1} = 1 + (n-1) \cdot 2^n$ 7. 5 es divisor de $n^4 - 1$ 9. $2n \leq 2^n$

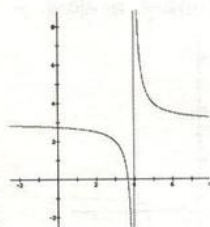
Ejercicios 3.1

1. Sí 2. Sí 3. $P = 2x + \sqrt{2x-1}$ 4. $BE = \frac{40x}{25+x}$ 5. $ST = \sqrt{x^2 + 2ax}$, $a = 6.4 \times 10^3$
6. $TV = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos x}$ 7. $v = 1.24 \times 10^8 \frac{m}{seg}$ 8. Considere la proporción $\frac{20}{5+x} = \frac{\sqrt{x^2 + DE^2}}{x}$
9. $t = \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \sqrt{625 + (50-x)^2}$ 10. $A = \left(\sqrt{7} - \frac{\sqrt{7}}{6}x\right)x$ 11. 5 12. $\frac{5}{2}$ 13. 2.93 14. $\frac{32}{3}$ 15. $-\frac{1}{6}$
16. -1 17. 3 18. 1 19. $\frac{7-a}{2}$ 20. -1 21. $\frac{3}{2}$ 22. -1 23. 10 25. $\frac{1}{a}$ 27. $\frac{2}{3}$ 29. $\frac{1}{(1-a)(1-b)}$

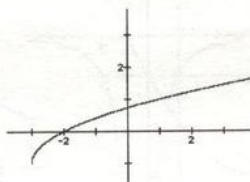
31. 1 33. $\frac{1}{2}$ 35. 1.000125 37. $-\frac{1}{(1-a)^2(a^2+a+1)}$ 39. $y = \sqrt{x-3} + 1$ 41. $y = \frac{x-1}{(x+2)^2}, (x \neq -2)$
 43. $y = \pm\sqrt{x^2 - 2x + 1}$ 45. No 47. Sí 49. No 51. $y = \pm\sqrt{x-1}$ 53. $y = x^2$
 55. $y = 1 + \sqrt{x}, y = 1 - \sqrt{x}$ 57. $y = 3 - 2x$

Ejercicios 3.2

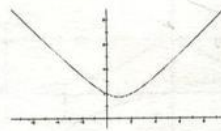
1. $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ 3. $]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$ 5. $]0, \infty[$ 7. $]-\infty, \infty[$ 9. $]-\infty, \infty[$ 11. $]-\infty, \infty[$ 13. $]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$
 15. $]-\infty, \infty[$ 17. $]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$ 19. $]-\infty, -1[\cup]-1, 2[\cup]2, 3[\cup]3, \infty[$



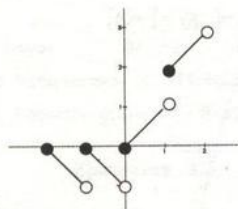
25.



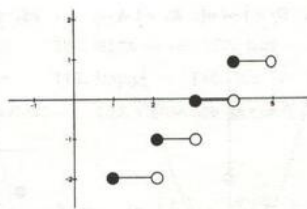
27.



35.



37.



39.

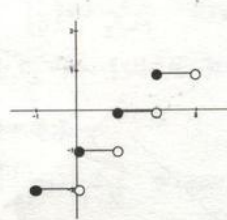
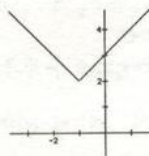
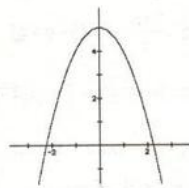
 41. $[0, \infty[$

 43. $[-4, \infty[$

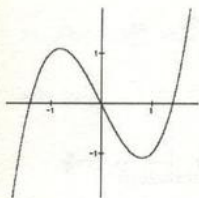
 45. $]0, \infty[$ 47. $]0, \infty[$ 49. $[3, \infty[$ 51. $[0, \infty[$

 53. $\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[, \mathcal{R}_f =]-\infty, 5]$

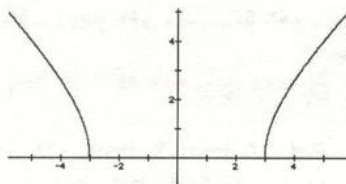
 55. $\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[, \mathcal{R}_f = [2, \infty[$

 57. $\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[, \mathcal{R}_f = \mathbb{Z}$


59. $\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[, \mathcal{R}_f =]-\infty, \infty[$

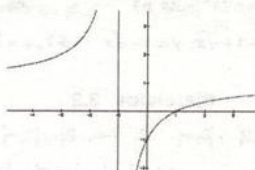


61. $\mathcal{D}_f =]-\infty, -3] \cup [3, \infty[, \mathcal{R}_f = [0, \infty[$

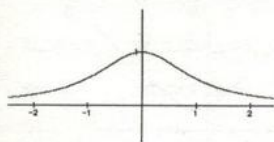


63. $\mathcal{D}_f =]-\infty, 1[\cup]1, \infty[,$

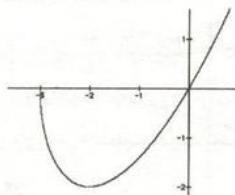
$\mathcal{R}_f =]-\infty, -1[\cup]-1, \infty[$



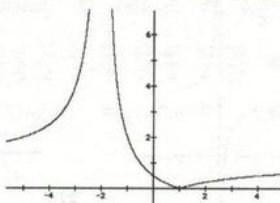
65. $\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[, \mathcal{R}_f =]0, 1]$



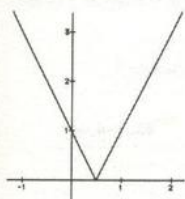
67. $\mathcal{D}_f = [-3, \infty[, \mathcal{R}_f = [-2, \infty[$



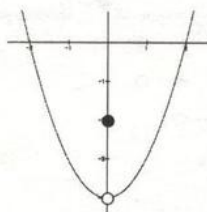
69. $\mathcal{D}_f =]-\infty, -2[\cup]2, \infty[, \mathcal{R}_f = [0, \infty[$



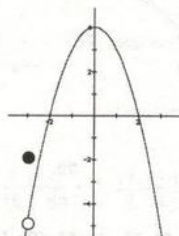
71. $\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[, \mathcal{R}_f = [0, \infty[$



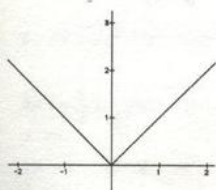
73. $\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[, \mathcal{R}_f =]-4, \infty[$



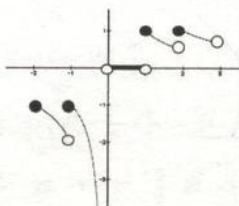
75. $\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[, \mathcal{R}_f =]-\infty, 4]$



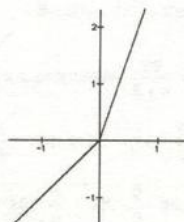
77. $\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[, \mathcal{R}_f = [0, \infty[$



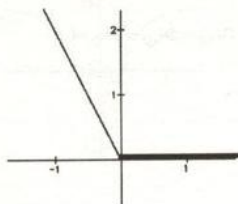
79. $\mathcal{D}_f =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[,$
 $\mathcal{R}_f =]-\infty, -1[\cup]0, 1]$



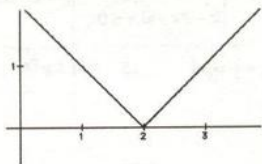
81. $\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[, \mathcal{R}_f =]-\infty, \infty[$



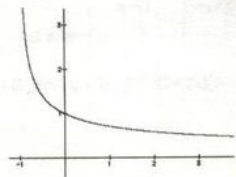
83. $\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[, \mathcal{R}_f = [0, \infty[$



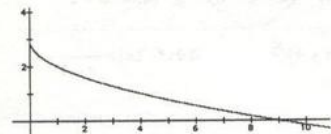
85. $\mathcal{D}_f =]-\infty, \infty[, \mathcal{R}_f = [0, \infty[$



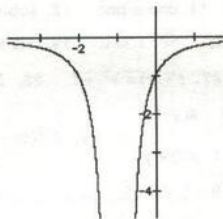
87. $\mathcal{D}_f =]-1, \infty[, \mathcal{R}_f =]0, \infty[$



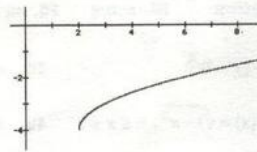
89. $\mathcal{D}_f = [0, \infty[, \mathcal{R}_f =]-\infty, 3]$



91. $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]-1, \infty[, \mathcal{R}_f =]-\infty, 0[$



93. $\mathcal{D}_f = [2, \infty[, \mathcal{R}_f = [-4, \infty[$



95. Impar

97. Par

99. Impar

101. Nada de eso

103. par

105. Nada de eso

107. Par

109. Nada de eso

111. Nada de eso

113. Impar

115. No

117. Impar

119. Sí

 121. Consider $g(x) = f(x) + f(-x)$ y $h(x) = f(-x)$

 123. Considere $g(x) = f(-x)$ y $h(x) = f(x) - f(-x)$

Ejercicios 3.3

1. $(f+g)(x) = 2x-3$, $(f-g)(x) = 7$, $(f \cdot g)(x) = x^3 - 3x - 10$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+2}{x-5}$, $(f \circ g)(x) = x-3$, $(g \circ g \circ f)(x) = x-8$,

$(g \circ f \circ g)(x) = x-8$, $g^4(x) = (x-5)^4$, $\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_{f-g} = \mathcal{D}_{f \cdot g} = \mathbf{R}$, $\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} =]-\infty, 5[\cup]5, \infty[$, $\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathcal{D}_{g \circ g \circ f} = \mathcal{D}_{g \circ f \circ g} =]-\infty, \infty[$,

$\mathcal{D}_{g^4} =]-\infty, \infty[$.

3. $(f+g)(x) = \frac{x^2+x-1}{x(x-1)}$, $(f-g)(x) = \frac{x^2-x-1}{x(1-x)}$, $(f \cdot g)(x) = \frac{x+1}{x(x-1)}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $(f \circ g)(x) = x$,

$(g \circ g \circ f)(x) = \frac{x+1}{x}$, $g^4(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^4$, $\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_{f-g} = \mathcal{D}_{f \cdot g} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, \infty[$, $\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, \infty[$,

$\mathcal{D}_{f \circ g} =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$, $\mathcal{D}_{g \circ g \circ f} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, \infty[$, $\mathcal{D}_{g \circ f \circ g} =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$, $\mathcal{D}_{g^4} =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$.

7. $(f+g)(x) = |x| + |x-2|$, $(f-g)(x) = |x| - |x-2|$, $(f \cdot g)(x) = |x^2 - 2x|$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left|\frac{x}{x-2}\right|$, $(f \circ g)(x) = |x-2|$,

$(g \circ g \circ f)(x) = ||x| - 2| - 2|$, $(g \circ f \circ g)(x) = ||x-2| - 2|$, $g^4(x) = (x-2)^4$, $\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_{f-g} = \mathcal{D}_{f \cdot g} = \mathbf{R}$, $\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} =]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$,

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathcal{D}_{g \circ g \circ f} = \mathcal{D}_{g \circ f \circ g} = \mathcal{D}_{g^4} =]-\infty, \infty[$$

$$11. (f+g)(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+1}{1-x} & \text{si } x < 1 \\ x+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad (f \circ g)(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 2-2x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (f \circ g)(0) = 2 \quad \mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_{f \circ g} =]-\infty, \infty[$$

$$13. (f \circ g \circ h)(x) = |x-1|, (f \circ g \circ h)(-1) = 2, \mathcal{D}_{f \circ g \circ h} =]-\infty, \infty[\quad 15. f(x) = x^{1/3}$$

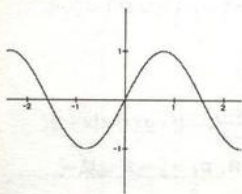
Ejercicios 3.4

1. biyectiva 2. sobre 3. sobre 4. biyectiva 5. biyectiva 6. biyectiva 7. nada de eso
 8. biyectiva 9. biyectiva 10. uno a uno 11. uno a uno 12. sobre 13. nada de eso 14. biyectiva
 15. nada de eso 16. uno a uno 17. biyectiva 18. sobre 19. uno a uno 20. biyectiva 21. biyectiva
 22. biyectiva 23. sobre 25. no existe 27. $f^{-1}(x) = x^3 + 1$ 29. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 2$ 31. $g^{-1}(u) = 3u - 2$
 33. $x = (y-1)^{1/3}$ 35. $x = \begin{cases} y-1 & \text{si } y \leq 0 \\ \sqrt{y}-1 & \text{si } 0 < y \end{cases}$ 37. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x+4)^{1/3}$ 39. $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$
 41. $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$ 43. $x = \sqrt{y^2-2} + 1, y \geq \sqrt{2}$

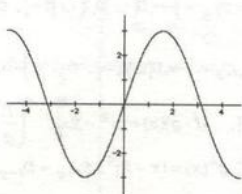
Ejercicios 3.5

1. $\frac{\pi}{6}$ 3. $\frac{\pi}{4}$ 5. $\frac{2\pi}{3}$ 7. $\frac{5\pi}{6}$ 9. $\frac{7\pi}{6}$ 11. $\frac{3\pi}{2}$ 13. $\frac{7\pi}{4}$ 15. 2π 17. $-\frac{\pi}{3}$ 19. $\frac{21\pi}{4}$ 21. $\frac{19\pi}{3}$
 23. $\frac{35\pi}{4}$ 25. -3π 27. -14π 29. 4π 31. 90° 33. 120° 35. 45° 37. 60° 39. 30° 41. 360°
 43. 300° 45. 315° 47. -420° 49. -225° 51. 0.3193 55. 0.9411 57. 0.5779 59. 0.9489 61. 10.81
 63. 1 65. 0.4643 67. -1.4571 69. 1.9318 71. $\frac{1}{2}$ 73. ∞ 75. 1 77. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 79. ∞ 81. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 83. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 85. 0 87. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 89. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

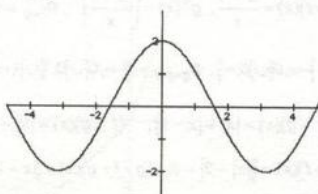
115.



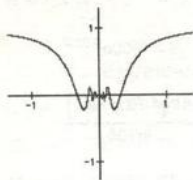
117.



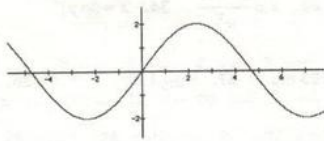
119.



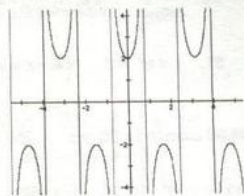
121.



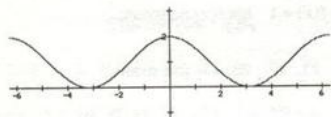
123.



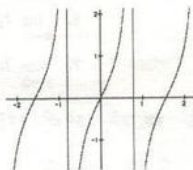
125.



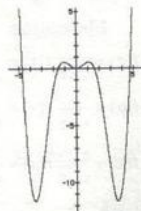
127.



129.



131.



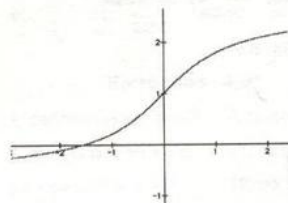
133. impar 135. par 137. impar 139. nada de eso

Ejercicios 3.6

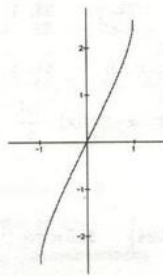
 1. 0 3. $\frac{5\pi}{4}$ o $-\frac{3\pi}{4}$ 5. $\frac{\pi}{6}$ 7. 0 9. 0.96 11. 0.001 13. -0.57735 15. $\frac{\pi}{4}$ 16. $\frac{\pi}{4}$ 17. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$

 18. $\frac{\pi}{4}$ 19. válido para todo θ 20. $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$

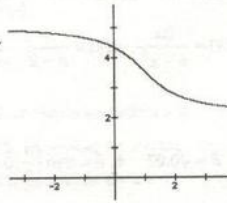
26.



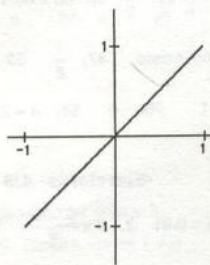
27.



28.



29.



Ejercicios 3.7

 1. 2 3. 4 5. $\frac{3}{2}$ 7. $\log_a 3 + \log_a x + \log_a y$ 9. $\log_a x - \log_a y - \log_a z$

 11. $\frac{1}{2}(\log_a x + \log_a y) - \frac{1}{3}\log_a z$ 13. $\log_a \frac{\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{z}}$ 15. $\ln 5 \sqrt{\frac{x^3}{y^2 z^4}}$ 17. -3, 1 18. -2 19. 2, -2 20. ± 2

$$21. 1 \quad 22. \frac{1}{\log_2 a} \quad 23. 1 \quad 24. 1 + \sqrt{2, 1 + \sqrt{2}}, 1 - \sqrt{2} \quad 25. -3, 2 \quad 26. 0 \quad 27. 0 \quad 28. \frac{2}{3} \quad 29. \frac{1}{5}$$

$$30. \frac{3}{5} \quad 31. x = e^y + 3 \quad 32. x = \log_2 \frac{y}{1-y} \quad 33. x = \frac{e^y - 1}{e^y} \quad 34. x = (\ln y)^2 \quad 35. N = 1000e^{0.025t},$$

$$N = 2398.88 \text{ cuando } t = 35 \text{ min} \quad 36. N = 78.024793 \text{ mg} \quad 37. \log_{10} 1.26 \quad 38. M_S = \frac{5 \ln(4.78 \times 10^{10})}{\ln 100},$$

$$M_L = 5 \left(\frac{\ln(12 \times 10^5)}{\ln 100} \right) \approx 12.7, \quad a = \sqrt[5]{100}$$

Ejercicios 4.1

$$\begin{aligned} 1. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 & \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \\ 5. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 & \quad 7. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ no existe} \\ 9. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 & \quad 11. 5 \quad 13. 7 \quad 15. 4 \quad 17. \frac{1}{2} \quad 19. 0 \quad 21. 2 \quad 23. +\infty \text{ (no existe)} \\ 25. -1 \quad 27. \frac{1}{2} \quad 29. \frac{\sqrt{3}}{6} \quad 31. \text{no existe} \quad 33. -\frac{1}{9} \quad 35. -\frac{1}{2} \quad 37. \text{no existe} \quad 39. \text{no existe} \\ 41. k = -4 \quad 42. k = -1, -2 \quad 43. k = 1 \quad 45. k = \pm 4 \end{aligned}$$

Ejercicios 4.2

$$\begin{aligned} 1. -4 \quad 2. -2 \quad 3. 3 \quad 4. 63 \quad 5. 2 \quad 6. \left(\frac{11}{3}\right)^2 \quad 7. 3 \quad 8. \frac{1}{12} \quad 9. 3 \quad 10. \frac{1}{3} \quad 11. 5 \quad 12. \frac{1}{5} \quad 13. 5 \\ 14. -1 \quad 15. \frac{5}{6} \quad 16. 0 \quad 17. 2 \quad 18. -2 \quad 19. 5 \quad 20. 6 \quad 21. 1 \quad 22. \text{no existe} \quad 23. 0 \quad 24. -\frac{1}{4} \quad 25. 1 \\ 26. -1 \quad 27. \frac{1}{2} \quad 28. \text{no existe} \quad 29. \frac{\sqrt{2}}{4} \quad 30. 3 \quad 31. \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad 32. -1 \quad 33. 1 \quad 34. 0 \quad 35. -\frac{1}{4} \\ 36. \text{no existe} \quad 37. \frac{1}{2} \quad 38. \text{no existe} \quad 39. 34 \quad 40. \frac{1}{2\sqrt{x}}, (x > 1) \quad 41. 4 \quad 43. -\frac{1}{4} \quad 45. \text{no existe} \\ 47. 1 \quad 49. -4 \quad 51. a = 2, f(x) = \frac{3x}{4-x^2}, g(x) = \frac{1}{x-2} \quad 53. a = 0, f(x) = \frac{|x|}{x} \quad 55. \text{no} \end{aligned}$$

Ejercicios 4.3

$$1. \delta = 0.01 \quad 2. \delta = \frac{0.005}{3} \quad 3. \delta = \sqrt{0.07} \quad 4. \delta = \min\left\{\frac{1}{3}, 0.0024\right\} \quad 5. \delta = \min\{1, \varepsilon\}$$

Ejercicios 4.4

$$\begin{aligned} 1. 0 \quad 3. 0 \quad 5. 1 \quad 7. 0 \quad 9. 0 \quad 11. \sqrt{2} \quad 13. -1 \quad 15. 1 \quad 17. 0 \quad 19. -3 \quad 21. y = 1, y = -1 \\ 23. y = 3 \quad 25. y = 0 \quad 27. y = 1 \quad 29. y = 1, y = -1 \quad 31. y = 1 \quad 33. y = 2 \quad 35. y = 1 \quad 37. y = 1 \\ 39. y = 1 \quad 41. y = x + 1 \quad 43. y = 2x - 3 \quad 45. y = x \quad 47. y = -\frac{1}{2}x \quad 49. y = x \quad 51. \text{Para cada } \varepsilon > 0 \text{ tómesese} \end{aligned}$$

$$N = -1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < 0 \quad 53. \text{ Para cada } \varepsilon > 0 \text{ tómesese } N = -\sqrt{\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}. \quad 55. \text{ Para cada } \varepsilon > 0 \text{ tómesese } N > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$$

Ejercicios 4.5

1. $-\infty$ 2. $-\infty$ 3. $-\infty$ 4. $+\infty$ 5. $-\infty$ 6. $-\infty$ 7. $-\infty$ 8. $-\infty$ 9. $-\infty$ 10. $+\infty$ 11. $-\infty$ 12. $+\infty$
 13. $-\infty$ 14. $+\infty$ 15. $+\infty$ 16. $-\infty$ 17. $+\infty$ 18. $-\infty$ 19. $+\infty$ 20. $+\infty$ 21. $x = -1$ 22. $x = -1, x = 1$
 23. $x = 1, x = -1$ 24. $x = 0$ 25. $x = 1$ 26. $x = 2, x = -2$ 27. $x = 1, x = -1$ 28. $x = 1, x = -1$
 29. $x = 0, x = 2$ 30. $x = 0, x = 2$ 31. $x = 1, x = -1$ 32. $x = 0, x = 2$ 33. $x = -2, x = 0, x = 2$
 34. $x = -2, x = 0, x = 2$ 35. $x = 0$ 36. $x = 1$ 37. $x = -1$ 38. $x = 4$ 39. $x = 0$ 40. $x = 0, x = 1$
 45. Tómesese $a = 1, f(x) = 1 - x$ y $g(x) = \tan \frac{\pi x}{2}$

Ejercicios 4.6

1. 3 2. 1 3. $\frac{1}{2}$ 4. $+\infty$ 5. $\frac{1}{3}$ 6. $\frac{1}{2}$ 7. 1 8. 5 9. $-\infty$ 10. 0 11. 0 12. 1 13. 0 14. 0
 15. 0 16. 0 17. 0 18. $-\infty$ 19. $+\infty$ 20. 2 21. 0 22. 0 23. 0 24. $+\infty$ 25. $-\infty$ 26. $-\infty$ 27. 0
 28. $+\infty$ 29. $-\infty$ 30. 0 31. $\frac{1}{2}$ 32. $\frac{\pi}{2}$ 33. 0 34. $\frac{2}{\pi}$ 35. $-\frac{3}{2}$ 36. 1 37. 0 38. 0 39. 1
 40. $-\infty$ 41. 0 42. $-\infty$ 43. 0 44. 0 45. 1 46. $\frac{3}{2}$

Ejercicios 4.7

1. $\frac{1}{3}$ 2. 0 3. 0 4. 1 5. 1 6. 0 7. $+\infty$ 8. 0 9. 0 10. 0^+ 11. $+\infty$ 12. $+\infty$ 13. $+\infty$
 14. 0 15. 0 16. 0 17. $\ln 2$ 18. 0 19. 0 20. 0 21. $+\infty$ 22. 0 23. 0 24. 1 25. 0 26. 0
 27. 0 28. 0 29. $-\infty$ 30. 0 31. 0 32. $-\infty$ 33. $+\infty$ 34. $-\infty$ 35. $\frac{1}{3}$ 36. 0 37. e 38. e^{-1} 39. 1
 40. $\frac{1}{2}$ 41. $\frac{1}{9 \ln 3}$ 42. 0 43. 2 44. 3 45. $\ln \frac{3}{2}$

Ejercicios 4.8

1. discontinua en $x = -3$ 3. discontinua en $x = 3$ 5. continua en todo $x > 0$ 7. discontinua en 1 y -1
 9. discontinua en $x = 0$ 11. removible en $x = 1$ 13. removible en $x = 0$ 15. esencial en $x = 0$
 17. esencial en $x = 0$ 19. no hay discontinuidades 21. removible en $x = 0$ 23. discontinua en $x = 0$
 25. continua en todo x 27. discontinua en $x = 1$ 29. continua en todo x 31. $a = b$ en $\mathbb{R}$
 33. $b = -3$ 35. $a = 2, 1; b = -1, \frac{1}{2}$ 37. $x = 2, 32$ 39. $x_1 = -1.76, x_2 = 0.37, x_3 = 1.57$
 41. $x_1 = -1.68, x_2 = 1.68$ 43. $x = 1.25$ 45. $x_1 = 1.61, x_2 = 0.61$ 47. $x = 1.25$ 49. $x_1 = -1.73, x_2 = 1.73$
 51. $f(0) = 0$ 52. $h(0) = 1$ 53. $g(0) = \frac{1}{2}$ 54. $f(0) = 0$ 55. $g(0) = 1$ 56. $h(0) = 3$ 57. $f(0) = 0$

58. $g(0)=0$ 59. $h(0)=1$ 60. $f(0)=3$

Ejercicios 4.9

1. 1 2. 1 3. 0 4. $+\infty$ 5. 1 6. 1 7. 0 8. 0 9. 1 10. 3 11. 0 12. e^a
 13. $\frac{1}{e^a}$ 14. e^a 15. 1 16. a 17. $b^a \ln a$ 18. $b^a \ln a^a$ 19. 0 20. a 21. e^a 22. $+\infty$
 23. $+\infty$ 24. $m-n$ 25. 1

Ejercicios 5.1

1. $m=0$ 3. $m=12$ 5. $m=4$ 7. $2x-y-5=0$, $x+2y+5=0$ 9. $2x-y-1=0$, $x+2y+2=0$
 11. $x-5y+9=0$, $5x+y+19=0$ 13. $x-2y+1=0$, $2x+y-3=0$ 15. $x+2y-3=0$, $2x-y-1=0$
 17. $x-2y-1=0$, $2x+y-2=0$ 19. $4x+4y+1=0$ 21. $2x+y-5=0$ 23. $4x+y+1=0$
 25. $32x+16y+23=0$ 27. $(3,-7)$, $(-1,1)$

Ejercicios 5.2

1. $f'(x)=-1$ 3. $f'(x)=1$ 5. $f'(x)=\frac{-1}{2x^{3/2}}$ 7. $f'(x)=2x-3$ 9. $f'(x)=-2x$ 11. $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^{3/2}}$
 13. $f'(0)=-1$ 15. $f'(0)=0$ 17. $f'(4)=-\frac{1}{16}$ 19. $f'(2)=\frac{1}{2}$ 21. $f'(2)=-\frac{1}{2}$ 23. $f'(1)=\frac{1}{4}$ 25. no porque
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$ 27. no porque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x-1]+1}{x}$ no existe 29. no existe

Ejercicios 5.3

1. $y'=6x$ 3. $y'=-\frac{15}{x^4}$ 5. $y'=\frac{18}{(1-3x)^2}$ 7. $y'=3x^2-1$ 9. $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ 11. $y'=\frac{-4x}{(2x^2+1)^2}$
 13. $y'=\frac{1}{3(x-1)^{2/3}}$ 15. $y'=-\frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}$ 17. $y'=\frac{3}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)^{1/2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ 19. $y'=\frac{1-x}{|2x^2-3x+1|}$
 21. $y'=\frac{3x^{5/3}+4x^{3/2}}{6x^{7/6}\left(x^{1/2}+x^{1/3}\right)^2}$ 23. $y'=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1-t}+\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t^2}}\right)$ 25. $y'=\frac{3}{2}\left(\frac{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}{x^{5/2}}\right)$ 27. $y'=\frac{2x^3-8x}{|x^2-4|}$
 29. $y'=\frac{3}{2}\left(\frac{t+3}{t+1}\right)$ 31. $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+x-2}}$ 33. $y'=\frac{1}{x(3-x)}$ 35. $y'=xe^x$
 37. $y'=\frac{2x}{x^2+4}-\frac{2}{x}+\arctan \frac{x}{2}$ 39. $y'=\frac{1}{\sin x}$ 41. $y'=\sin \frac{1}{x}-\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 43. $y'=-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$
 45. $y'=-3\sin 3x$ 47. $y'=\tan x \sec x$ 49. $y'=3\sec^2 3x$ 51. $y'=\frac{1-\cos x-x\sin x}{(1-\cos x)^2}$
 53. $y'=-\cot x \csc x$ 55. $y'=-2\sin 2x$ 57. $y'=\frac{\sec \sqrt{x+1} \tan \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}$ 59. $y'=\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

$$\begin{aligned}
 61. y' &= \arccos \frac{x}{2} - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} & 63. y' &= \arcsen \frac{x}{3} & 65. y' &= \frac{1}{9+x^2} & 67. y' &= \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{6}{\sqrt{4-x^2}} \\
 69. y' &= \sqrt{\frac{5}{5-(5x-1)^2}} & 71. y' &= \frac{9-2x}{2\sqrt{9-x^2}} & 73. y' &= -\frac{x^2-4\sqrt{4-x^2}-8}{x\sqrt{4-x^2}} & 75. y' &= x^2 e^{2x} \\
 77. y' &= x^{\sen x} \left(\frac{\sen x}{x} + \ln x \cos x \right) & 79. y' &= \csc x & 81. y' &= \left(\cos \frac{1}{x} \right)^x \left(\frac{1}{x} \tan \frac{1}{x} + \ln \left(\cos \frac{1}{x} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Ejercicios 5.4

$$\begin{aligned}
 1. f'(x) &= 2x-3, f''(x) = 2 & 3. y' &= 2x + \frac{1}{x^2} + 1, y'' = 2 - \frac{2}{x^3} & 5. f'(x) &= \frac{3}{2}\sqrt{x}, f''(x) = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{x}}{x} \\
 7. f'(x) &= (2x^2+1)e^{x^2}, f''(x) = 2x(2x^2+3)e^{x^2} & 9. y' &= 1 + \ln x + (x+1)e^x, y'' = \frac{1}{x} + (x+2)e^x \\
 11. g'(x) &= 1 + \ln x, g''(x) = \frac{1}{x} & 13. y' &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), y'' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & 15. f'(t) &= 2gt + v_0, f''(t) = 2g \\
 17. y' &= 4x(3x^2-1), y'' = 4(9x^2-1) & 19. h'(x) &= 9(1-x)^{-2}, h''(x) = 18(1-x)^{-3} & 21. a) t &= 8 \text{ seg} \quad b) -60 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \\
 c) 12 \text{ seg} \quad d) 720 \text{ m} & & 23. a) 2 \text{ seg} \quad b) 16 \text{ m} \quad c) 8 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} & & 24. 8 \frac{\text{m}}{\text{kg}} & 25. 5 \frac{\text{kg}-\text{higo}}{\text{g}-\text{fertilizante}}
 \end{aligned}$$

Ejercicios 5.5

$$\begin{aligned}
 1. \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} & 3. \frac{dy}{dx} &= \frac{1-y}{x \cos xy + 1} & 5. \frac{dy}{dx} &= \frac{1-2x}{2xy-2y} & 7. \frac{dy}{dx} &= \frac{x \cos x + \sen x}{2y} \\
 9. \frac{dy}{dx} &= \begin{cases} \frac{\sqrt{-x}}{2x^2} & \text{si } -3 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \end{cases} & 11. \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x-2y(x-y)^2} & 13. \frac{dy}{dx} &= 0 \text{ en } (0,2) & 15. \frac{dy}{dx} &= 0 \text{ en } (0,1) \\
 17. \frac{dy}{dx} &= 1 \text{ en } (1,1) & 19. x+y+1=0, x-y-3=0 & 21. y=\sqrt{3}, x=-2 & 23. x=\pi, y=0 & 25. x=2, y=2 \\
 27. 2x-5y+8=0, 5x+2y-9=0 & & 29. 4x+(\pi-4)y+4-2\pi=0, (\pi-4)x-4y+4+\frac{(4-\pi)\pi}{4}=0 \\
 31. (-2, \sqrt{3}), (-2, -\sqrt{3}) & 33. x=0, y=0 & 35. \frac{dy}{dx} = \frac{x \cos x + \sen x}{2\sqrt{x \sen x}}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x \sen 2x - x^2 - (1+x^2) \sen^2 x}{4(x \sen x)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

Ejercicios 5.6

$$\begin{aligned}
 1. 13 \frac{\text{m}}{\text{seg}} & & 2. -\frac{2 \text{ cm}^2}{5 \text{ min}} \text{ y } \frac{1 \text{ cm}^2}{5 \text{ min}} \text{ o } \frac{2 \text{ cm}^2}{5 \text{ min}} \text{ y } -\frac{1 \text{ cm}^2}{5 \text{ min}} & 3. a) \frac{dx}{dt} = 1 \frac{\text{m}}{\text{seg}} & b) \frac{dy}{dt} = 1 \frac{\text{m}}{\text{seg}} & c) \frac{dz}{dt} = 2 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \\
 4. \frac{32 \text{ cm}}{21 \text{ min}} & 5. -\frac{3 \text{ m}}{2 \text{ seg}} & 6. a) 1.125 \text{ partes por millón por año} & b) 22.5 \text{ años} & 7. 41.35 \frac{\text{m}}{\text{h}} & 8. 0.51\pi \frac{\text{cm}}{\text{seg}} \\
 9. -40 \frac{\text{cm}}{\text{seg}} & 10. 0.44 \frac{\text{m}}{\text{seg}} & 11. -14 \frac{\text{cm}}{\text{seg}} & 12. 0.009 \frac{\text{m}}{\text{min}} & 13. 4\pi r^2 & 14. a) -4.9 \frac{\text{m}}{\text{seg}} & b) 5 \text{ seg} \\
 c) -49 \frac{\text{m}}{\text{seg}} & 15. -0.01170494 \times 10^{14} \text{ km por año} & 16. 2 \text{ km} & 17. a) 0.62 \frac{\text{cm}}{\text{min}} & b) 0.28 \frac{\text{cm}}{\text{min}}
 \end{aligned}$$

Ejercicios 5.7

1. $dy = (3x^2 - 3)dx$ 3. $dy = -\frac{1}{3x^2}dx$ 5. $dy = \frac{x^3 - 8}{x^3}dx$ 7. $dy = -\frac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}}dx$
9. $dy = \frac{x \cos \sqrt{1+x} + 2\sqrt{1+x} \sin \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}}dx$ 11. $dy = \frac{dx}{(1+x)^2}$ 13. $\Delta y = 3\Delta x$, $dy = 3dx$, $\Delta y - dy = 0$
15. $\Delta y = -2x\Delta x + (\Delta x)^2$, $dy = 2x dx$, $\Delta y - dy = (\Delta x)^2$ 17. $\Delta y = -\frac{(2x + \Delta x)\Delta x}{x^2(x + \Delta x)^2}$, $dy = -\frac{2dx}{x^3}$
- $\Delta y - dy = \frac{(3x + 2\Delta x)(\Delta x)^2}{x^3(x + \Delta x)^2}$ 19. $\Delta y = (2x + \Delta x + 6)\Delta x$, $dy = 2(x + 3)dx$, $\Delta y - dy = -(\Delta x)^2$
21. $\Delta y = (2x + \Delta x - 1)\Delta x$, $dy = (2x - 1)dx$, $\Delta y - dy = -(\Delta x)^2$ 23. $\Delta y = \ln \frac{x + \Delta x}{x}$, $dy = \frac{dx}{x}$, $\Delta y - dy = \ln \frac{x + \Delta x}{x}$
25. 10.1 27. 1.9 29. 0.97 31. 1.6642 33. -3.5040 35. 1.0527 37. 5.5 39. 0.18
41. 0.75 cm^3 43. $\frac{\Delta V}{V} = \pm 0.06 = \pm 6\%$ 45. $\Delta m = -12.245 \text{ kg}$ 46. $p = 0.2262 \text{ w kg}$ 47. $\Delta P = 1.25$ milímetros de mercurio.

Ejercicios 5.8

1. $x_4 = 0.796544$ 3. $x_4 = 1.55715$ 5. $x_4 = 0.567143$ 7. $c = -0.703467$ 9. $c = -1.93456$ 11. 2.15443
13. 1.37973 15. 2.6591479 17. $x_1 = 1.11278$ 19. $x_1 = 0.703467$ 21. $x_1 = -0.351734$
23. $x_1 = 0.619061$, $x_2 = 1.51213$ 25. $x_1 = -0.796544$ 27. $x_1 = 1.1673$ 29. $x_1 = -0.724492$, $x_2 = 1.2204$

Ejercicios 6.1

1. Máximo absoluto y local en $x = 0$ 3. Mínimo absoluto en cada x en $[0, 1]$ y máximo absoluto en $x = 1$
5. No hay máximo ni mínimo absoluto. Hay un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 1$ 7. Hay un mínimo absoluto en $x = -1$ y un máximo absoluto en cada x en $[0, 1]$ 9. Hay un máximo absoluto en $x = 3$ y un máximo local en $x = 0$. Hay un mínimo local en $x = -1$ y en $x = 1$ 11. Mínimo absoluto en $x = -1$ y máximo absoluto y local en $x = 0$
- Hay un mínimo local en $x = \frac{4}{3}$ 13. Hay un máximo local y absoluto en $x = 2n\pi$ para cada número entero n . Hay un mínimo local y absoluto en $x = (2n + 1)\pi$ o $x = (2n - 1)\pi$ para cada número entero n 15. Máximo local y absoluto en $x = -\frac{3\pi}{2}$ y en $x = \frac{\pi}{2}$. Hay un mínimo local y absoluto en $x = -\frac{\pi}{2}$ y en $x = \frac{3\pi}{2}$ 17. Mínimo absoluto en $x = 0$ y máximo local y absoluto en $x = 2$ 19. Mínimo absoluto en $x = 0$ y máximo absoluto en $x = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ 21. Mínimo absoluto en $x = 0$ y en $x = 1$. No hay máximos 23. -3, -2, 0, 1 25. 0, 1, 2 27. $-\frac{1}{2}, 0, \sqrt[3]{2}$ 29. -2, 0, 2
31. -1, 0, $\frac{1}{2}, 1, 2$ 33. $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ 35. -2, 0, 2 37. -2, -1, 0, 2 39. -2, -1, $-\frac{1}{2}, 0, 1$ 41. $0, \sqrt[3]{2}, 3$
43. -3, $-\sqrt[3]{2}, 0, 1$ 45. $h = \frac{4}{3}a$, $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$ 47. $4\sqrt[3]{25}, \frac{100}{\sqrt[3]{25}}, 8$ 49. $x = \frac{k^2}{1 + 2k}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^2}{1 + 2k}}$

51. $x = \sqrt{3}a, h = \frac{3a}{2}$

Ejercicios 6.2

1. cualquier c en $]0, 2[$ 3. $c = \frac{3}{2}$ 5. $c = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 7. $c = -0.802557$ 9. $c = \pm\sqrt{2}$ 13. $t_0 = 1$

15. no, porque f no es continua en $[-2, 2]$ 17. porque f no es continua en $]-1, 1[$

20. Considere $h(x) = f(x) - ax$ en donde $a = f'(x)$ y demuestre que h es constante; digamos $h(x) = b$

21. Demuestre que $x_1 \neq x_2$ en $[a, b]$ implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$. De donde existe f^{-1}

22. Demuestre que $g(b) - g(a) \neq 0$ y considere $h(x) = f(g(x)) - f(g(a)) - \frac{f(g(b)) - f(g(a))}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$ y concluya usando el teorema de Rolle.

Ejercicios 6.3

1. Decrece en $]-\infty, -4[$ y $]2, \infty[$. Crece en $]-4, 2[$

2. Crece en $]-\infty, -1[$ y $]1, \infty[$. Decrece en $]-1, 0[$ y $]0, 1[$

3. Crece en $]-\infty, 0[$. Decrece en $]0, \infty[$

4. Decrece en $]-\infty, -2[$ y $]0, 1[$. Crece en $]-2, 0[$ y $]1, \infty[$

5. Decrece en $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ y $]2, \infty[$. Crece en $]0, 2[$

6. Decrece en $]-\infty, \sqrt[3]{2}[$, $]0, 1[$ y $]1, \infty[$

7. Decrece en $]-\infty, 0[$. Crece en $]0, \infty[$

8. Crece en $]-\infty, 0[$. Decrece en $]0, \infty[$

9. Crece en $]-\infty, -1[$ y $]0, \infty[$. Decrece en $]-1, 0[$

10. Crece en $]-\infty, 1[$. Decrece en $]1, \infty[$

11. Crece en $]-\infty, -1[$ y $]1, \infty[$. Decrece en $]-1, 0[$ y $]0, 1[$

12. Decrece en $]-\infty, -1[$ y $]0, 1[$. Crece en $]-1, 0[$ y $]1, \infty[$

13. Decrece en $]-2\pi, x_0[$ y $]0, x_0[$. Crece en $]-x_0, 0[$ y $]x_0, 2\pi[$ con $x_0 = 4.49341$

14. Decrece en $]-\infty, -1[$ y $]0, 1[$. Crece en $]-1, 0[$ y $]1, \infty[$

15. Decrece en $]-\infty, -\sqrt{13}[$, $]-1, 0[$ y $]1, \sqrt{3}[$. Crece en $]-\sqrt{3}, -1[$, $]0, 1[$ y $] \sqrt{3}, \infty[$

16. Decrece en $]-\infty, 0[$. Crece en $]0, \infty[$

17. Crece en $]-\infty, 0[$ y $]1, \infty[$. Decrece en $]0, 1[$

18. Decrece en $]-\infty, 0[$. Crece en $]0, \infty[$ 19. Crece en $]-\infty, x_1[$ y $]x_2, \infty[$. Decrece en $]x_1, x_2[$ con $x_1 = 3.18$ y $x_2 = 4.81$

20. Decrece en $]0, x_0[$ y $]x_0, 1[$ con $x_0 = 0.367879$. Crece en $]1, \infty[$

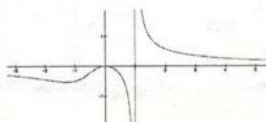
21. Decrece en $]-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}[$. Crece en $]-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{3}[$ y $]\frac{\sqrt{6}}{3}, \infty[$

22. Demuestre que la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$ es creciente en $]-\infty, -1[$ y de ello concluya lo que se pide

23. Considere la función $f(x) = \sin x - x$

27. Hay dos casos $0 < a \leq b$ o $0 < b \leq a$. Sin pérdida de generalidad suponga que $0 < a \leq b$ y demuestre que la función

$$f(x) = \sqrt{ax} - \frac{1}{2}(a + x)$$
 es creciente.

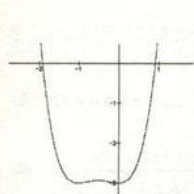


29.

 31. Porque el dominio de f no es un intervalo.

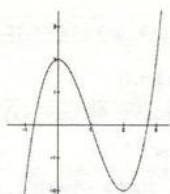
Ejercicios 6.4

1. Máximo en $x = -\frac{1}{2}$. Mínimo en $x = 0$ y $x = -1$

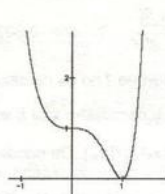


Ej. 1

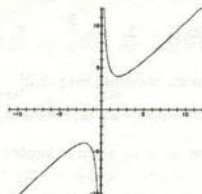
2. Máximo en $x = 0$. Mínimo en $x = -1$ y $x = 2$



Ej. 3



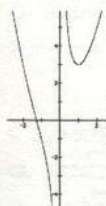
Ej. 4



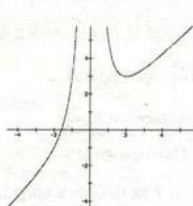
Ej. 5

3. Máximo en $x = 0$. Mínimo en $x = 2$ 4. Mínimo en $x = 1$ 5. Máximo en $x = 2$. Mínimo en $x = -2$

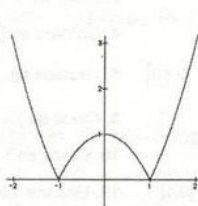
6. Mínimo en $x = 1$ 7. Mínimo en $x = 2$ 8. Máximo en $x = 0$. Mínimo en $x = 1$ y $x = -1$



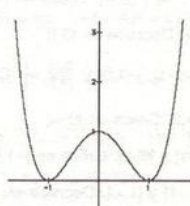
Ej. 6



Ej. 7



Ej. 8



Ej. 9

9. Máximo en $x = 0$. Mínimo en $x = 1$ y $x = -1$

10. Máximo en $x = 0$

11. Mínimo en $x = 1$

12. Mínimo en $x = e^{-1}$

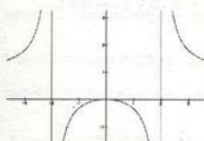
13. Máximo en $x = 0$ 14. Mínimo en $x = -1$

15. Máximo en $x = 1$

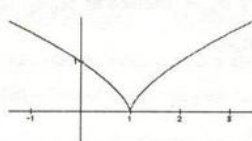
16. Mínimo en $x = 1$

17. Máximo en $x = -1$

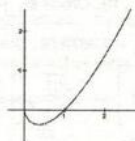
18. Mínimo en $x = 0$ 19. Máximo en $x = -1$. Mínimo en $x = 1$ 20. Mínimo en $x = 1$



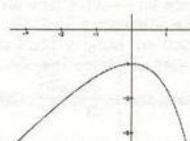
Ej. 10



Ej. 11



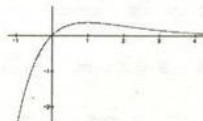
Ej. 12



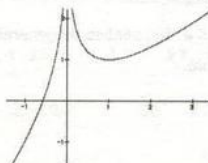
Ej. 13



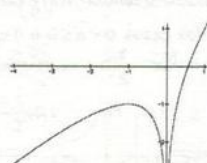
Ej. 14



Ej. 15



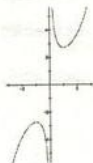
Ej. 16



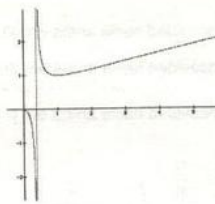
Ej. 16



Ej. 18



Ej. 19

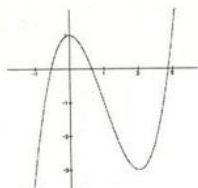


Ej. 20

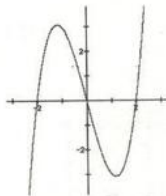
21. $a=3, b=-9$ 22. $a=2, b=3, c=-12$ 23. a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ b) -1 y 2 24. $\frac{\pi}{\pi+4}$ 26. $\frac{1}{4}$ km del restaurant
 te 27. 1 m 28. $t = \frac{\pi r}{3}$ o $\frac{r}{3} \left(\pi + \sqrt{5} - \arccos\left(-\frac{1}{9}\right) \right)$ 29. A 16.2 km del punto de la playa más cercano a la
 ciudad A 30. $\theta = \frac{\pi}{3}$ 31. 10 32. 25×25 33. $r = \sqrt[3]{\frac{18}{\pi}}, h=0$ 34. a) 1 hora b) 1 hora c) R_2
 35. a) 8 horas b) $108 \frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ 36. a) Fue máximo hace 2 años b) Dentro de 2 años será mínimo
 37. Largo $3\sqrt{2}$. Ancho $2\sqrt{2}$ 38. $2\sqrt{3}x + y - 12 = 0$ 39. $u = \frac{200}{\pi}, v=0$ 40. $2\sqrt{2}a$ metros
 41. Demuestre que para $x = \sqrt{2}a$ el área del triángulo isósceles es máxima y que para ese valor de x las longitudes de
 sus lados satisfacen la relación del teorema de Pitágoras. Concluya con ello que dicho triángulo es triángulo rectángulo.
 42. a) 8 seg b) 256 m 43. a) 13.63 cm b) $\alpha = \beta = 47.726^\circ$ 45. $\theta = \frac{\pi}{4}$ 46. $\theta = \frac{\pi}{4}$ 47. $\sqrt{2}a$
 48. 3.5×2 49. -5 y 5 50. 5 y 5

Ejercicios 6.5

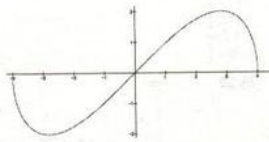
- | | | |
|----------------------------------|---|--|
| 1. Punto de inflexión: $(1, -1)$ | Concavidad hacia arriba en: $]1, \infty[$ | Concavidad hacia abajo en: $] -\infty, 1[$ |
| 3. Punto de inflexión: $(0, 0)$ | Concavidad hacia arriba en: $]0, \infty[$ | Concava hacia abajo en: $] -\infty, 0[$ |
| 5. Punto de inflexión: $(0, 0)$ | Concavidad hacia arriba en: $]0, 4[$ | Concava hacia abajo en: $] -4, 0[$ |
| 7. No hay puntos de inflexión | Concavidad hacia arriba en: $]0, \infty[$ | Concava hacia abajo en: $] -\infty, 0[$ |



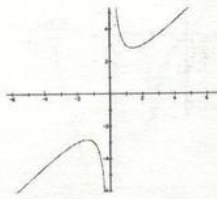
Ej. 1



Ej. 3



Ej. 5



Ej. 7

9. Punto de inflexión: $(0, 0)$ Concava hacia arriba en: $] -1, 0[$ y $]1, \infty[$ Concava hacia abajo en: $] -\infty, -1[$ y $]0, 1[$

11. Punto de inflexión: (0,0)

Concavidad hacia arriba en:]0,1[

Concava hacia abajo en:]-1,0[

13. Punto de inflexión: (0,0)

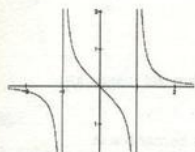
Concavidad hacia arriba en:]0,∞[

Concava hacia abajo en:]-∞,0[

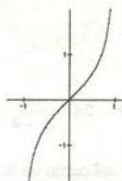
15. Punto de inflexión: $(0, \frac{\pi}{2})$

Concavidad hacia arriba en:]-1,0[

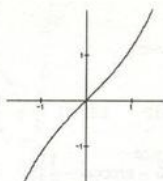
Concava hacia abajo en:]0,1[



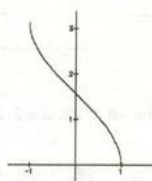
Ej. 9



Ej. 11



Ej. 13



Ej. 15

17. Punto de inflexión: (0,0)

Concavidad hacia arriba en:]-∞,0[

Concava hacia abajo en:]0,∞[

19. Inflexión: (0,0)

Concava hacia arriba en:]0,1[y]1,∞[

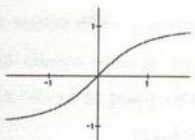
Concava hacia abajo en:]-∞,-1[y]-1,∞[

21. Inflexiones: (0,1) y $(\sqrt[3]{4}, \sqrt{3})$ Concava hacia arriba en:]-∞,0[y $[\sqrt[3]{4}, \infty[$ Concava hacia abajo en:]0,1[y $]1, \sqrt[3]{4}[$

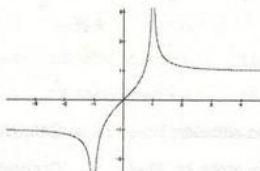
23. Punto de inflexión: (0,0)

Concava hacia arriba en:]-∞,-1[y]-1,0[

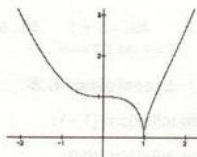
Concava hacia abajo en:]0,1[y]1,∞[



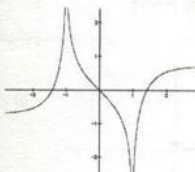
Ej. 17



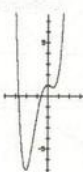
Ej. 19



Ej. 21



Ej. 23

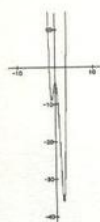


Ej. 25

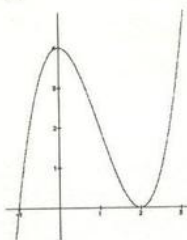
25. Punto de inflexión: $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ en donde $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ Concava hacia arriba en: $]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}[$ y $]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty[$ Concava hacia abajo en: $]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}[$

Ejercicios 6.6

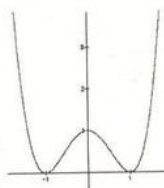
1.



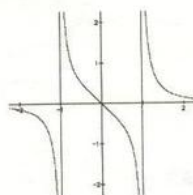
3.



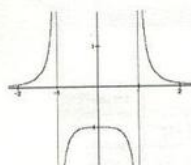
5.



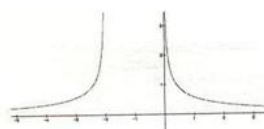
7



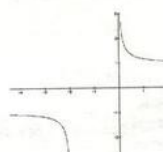
9.



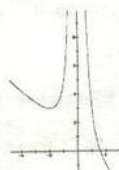
11.



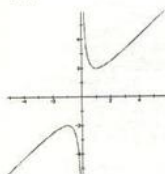
13.



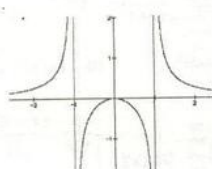
15.



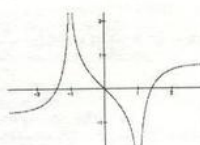
17.



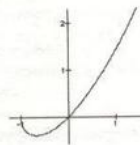
19.



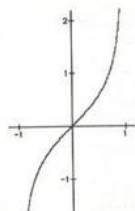
21.



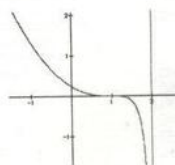
23.



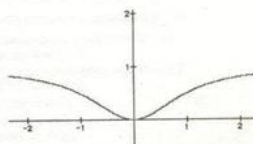
25.



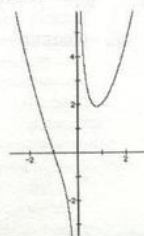
27.



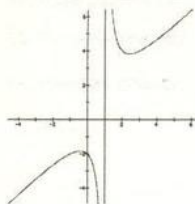
29



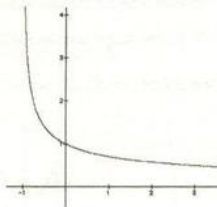
31.



33.



35.



Ejercicios 6.7

1. 0 3. 1 5. 0 7. $-\frac{1}{2}$ 8. $\sqrt{2}$ 9. $-\infty$ 10. $\frac{1}{2}$ 11. $+\infty$ 12. $-\infty$ 13. $-\infty$ 14. $-\infty$
 15. 0 16. 6 17. $+\infty$ 18. 0 19. 0 20. $+\infty$ 21. e 22. 1 23. 1 24. $-\infty$ 25. 1
 26. 0 27. 1 28. 1 29. 1 30. e 31. 1

Ejercicios 6.8

1. $p_4(x) = 1 - 4(x-1) - 10(x-1)^2 - 10(x-1)^3 - 5(x-1)^4$ 3. $P_3(x) = x - 2x^3$ 5. $P_9(x) = \sum_{n=1}^9 \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$
 7. $P_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$
 9. $P_6(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{2}{81}(x-1)^3 - \frac{10}{243}(x-1)^4 + \frac{22}{729}(x-1)^5 - \frac{154}{6561}(x-1)^6$
 11. $P_5(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3 + \frac{35}{128}(x-1)^4 - \frac{63}{256}(x-1)^5$ 13. $P_3(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$
 15. $P_3(x) = x + \frac{x^2}{2}$ 17. $P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$, $|R_3(x)| < \begin{cases} \frac{5}{128} \cdot \frac{(x-1)^4}{x^{7/2}} & \text{si } x < \xi < 1 \\ \frac{5}{128}(x-1)^4 & \text{si } 1 < \xi < x \end{cases}$
 19. $P_4(x) = \frac{1}{6} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^3 - \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$, $|R_4(x)| \leq \frac{1}{120} \left| x - \frac{\pi}{2} \right|^5$ 21. 1.6487 22. 2.71828 23. 0.2623
 24. 0.9017 25. -0.048663 26. 2.01234 27. 2.1544 28. 0.7835 29. 0.0177 30. 1.0932

ÍNDICE ANALÍTICO

Adición de funciones, 94

Aditiva, 41

Algebra de conjuntos, 25

Ángulo

central, 106

medida de un, 106

posición normal de un, 108

positivo, 108

negativo, 108

Aproximación por diferenciales, 256

Asíntotas

horizontales, 169

oblicuas, 169

definición de, 170

verticales, 181

Axioma del supremo, 67

de completitud, 67

Axiomas

de adición, 34

de multiplicación, 34

de orden, 41

Cauchy, A. L., 140

Complemento absoluto, 28

Complemento relativo, 27

Cóncava

hacia abajo, 293

hacia arriba, 293

Concavidades, 292-296

Conjunto

acotado inferiormente, 65

acotado superiormente, 65

complemento absoluto de un, 28

complemento relativo de un, 27

de números enteros, 12

de números irracionales, 55, 60

de números naturales, 12

de números racionales, 54

determinación de un, 14

elemento de un, 11

ínfimo de un, 66

nulo o vacío, 16

subconjunto de un, 18

supremo de un, 66

universal, 17

vacio o nulo, 16

Continuidad, 198-206

Criterio

de concavidad, 294

de la primera derivada, 284

de la segunda derivada, 287

D'Alembert, J., 139

Decimal periódico, 57

Definición formal de límite, 154-164

Densidad

propiedad de, 61

Derivada

como límite de una función, 214-218

de la función exponencial, 225-226

de la función logaritmo, 224-225

de las funciones trigonométricas,

229-231

inversas, 232-233

de una adición, 221

de una composición, 222

de una constante, 221

de una función, 215

de u^n , 227

de u^v , 234

del cociente de funciones, 229

del producto de funciones, 226

del valor absoluto de una función, 223

n-ésima de una función, 236-237

Derivación implícita, 239-243

Desigualdad del triángulo, 50

Desigualdades, 40-54

Determinación de un conjunto

por comprensión o descripción, 14

por enumeración o extensión, 14

Diagramas de Venn, 17

Diferencia o complemento relativo, 27

Diferenciable, 217-219

Diferencial de una función $y = f(x)$, 255

Diferencial de x , 255

Diferenciales, 254-257

Elemento

de un conjunto, 11

máximo, 65

mínimo, 65

Error

máximo, 257

porcentual, 257

relativo, 257

Euler, L., 133

Expansión decimal, 56

Fermat, P., 139

Forma de Lagrange del residuo,

315

Forma decimal, 57

Formas indeterminadas, 208-210,

310-313

Fórmula de Taylor, 314

Fórmulas trigonométricas, 116-118

Función

algebraica, 90

biyectiva, 101

cóncava hacia abajo, 293

hacia arriba, 293

concepto de, 75-76

constante, 86, 279

continua, 198

en un intervalo

abierto, 203

cerrado, 203

por la derecha, 203

por la izquierda, 203

creciente, 280

decreciente, 280

definida en forma implícita, 239

diferenciable, 217, 219

- discontinuidad de una, 200
dominio de una, 81
enrolladora o de dar vueltas, 107
exponencial, 132
gráfica de una, 83, 297
idéntica o identidad, 85
Imagen de una, 81
impar, 91
implícitamente definida, 239
inversa de una, 100
inyectiva, 101
límite de una, 141, 155, 156
logaritmo, 138
máximo entero, 88
par, 91
periódica, 116
período de una, 116
polinomial, 89
rango de una, 81
racional, 89
rango de una, 81
sobre, 101
suprayectiva, 101
uno a uno, 101
valor absoluto, 86
- Funciones**
exponenciales, 131-134
logarítmicas, 134-137
monótonas, 279-283
trigonómicas, 111-115
trigonómicas inversas, 126-130
- Grado, 106
- Gráficas**
de las funciones trigonométricas.
119-123
trazo de, 297-305
- Imagen de un elemento, 77
Imagen de una función, 100
implícita
derivación, 240
función en forma, 239
Incremento de x , 245
de y , 245
Inducción matemática, 69
Infimo, 66
Intersección de conjuntos, 26
Intervalo
abierto, 19
cerrado, 20
infinito, 20
semi-abierto, 20
semi-cerrado, 20
trivial, 20
- Leibniz, G., 139
Leonhard, E., 133
- Ley de cosenos, 117
Leyes de los exponentes, 131
- Límite**
definición formal de, 154-156
noción intuitiva de, 141
por la derecha, 143
por la izquierda, 142
- Límites**
al infinito
de las funciones exponenciales,
94-197
de las funciones logaritmo, 190-194
de las funciones trigonométricas,
182-189
infinitos, 172-181
infinitos al infinito, 176-181
laterales, 142
laterales infinitos, 175-176
- Logaritmo**
base de un, 134
natural, 135
- Máximo**
absoluto, 267
entero, 88
local o relativo, 268
Máximos y mínimos, 267-272
Medida de ángulos
en grados, 106
en radianes, 108
Método de Newton, 259-264
Mínimo
absoluto, 267
local o relativo, 268
- Newton, I., 139
método de, 259-264
Notación científica, 59
Número e , 133, 203, 224
- Operaciones entre funciones, 94**
- Parte no periódica, 57
Pendiente de la tangente, 212-214
Período, 57, 116
Pertenencia
pertenece a, 13
Polinomio de Taylor, 315
Posición normal o estándar, 108
Principio de inducción, 70
Producto cartesiano
representación gráfica de un, 22
- Propiedad**
aditiva, 42
arquimediana, 67
asociativa, 34
conmutativa, 34
de cerradura, 34
de densidad, 61
de tricotomía, 41
del elemento inverso, 34
del elemento neutro, 34
distributiva, 34
multiplicativa, 42
transitiva, 41
- Propiedades**
básicas de los logaritmos, 136
- fundamentales de los límites, 148
- Punto**
crítico, 271
de inflexión, 295
- Radián, 108
Rango, 81
Rapidez de variación, 246
- Razón**
de cambio, 244-251
instantánea, 245
media, 245
- Recta normal, 213, 242
Recta tangente, 213, 242
Redondeo de un número, 58
- Regla**
de la cadena, 222
de L'Hôpital, 306-313
- Reglas de derivación, 221-234**
- Relación**
de orden
"es mayor o igual que", 41
"es mayor que", 41
"es menor o igual que", 41
"es menor que", 41
entre grados y radianes, 109-110
Representación decimal, 56
- Rolle**
teorema de, 274
- Segundo teorema del valor medio,
306
Subconjunto, 17
Supremo, 66
- Taylor**
fórmula de, 314
polinomio de, 314
teorema de, 314
- Teorema**
del emparedado, 164
del valor intermedio, 204
del valor medio, 276
de Rolle, 274
de Taylor, 314
- Transitiva**
propiedad, 41
- Trazo de gráficas, 297-305
- Tricotomía**
propiedad de, 41
- Truncamiento de un número,
58
- Unión de conjuntos, 25
- Valor absoluto, 48, 86
Valor medio
teorema del, 276
segundo teorema del, 306
Velocidad, 211, 215, 237
- Weierstrass, K., 140

RESERVA

CÁLCULO DIFERENCIAL PARA CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

René Benítez

La presente obra ha sido elaborada expresamente para utilizarse como libro de texto de un primer curso de cálculo diferencial para el nivel superior, en las áreas de ciencias básicas e ingeniería, y asimismo, para adaptarse sin dificultad a diversos planes de estudio y enfoques, incluso en el nivel medio superior.

El autor, con base en una amplia experiencia, utiliza toda una serie de recursos didácticos que facilitan al estudiante la adquisición efectiva del conocimiento y propician el desarrollo de habilidades matemáticas, conforme con las tendencias modernas en la enseñanza de la materia.

Los ejercicios al final de cada sección permiten reafirmar y consolidar el aprendizaje. Al final se incluyen las respuestas de los ejercicios impares, a fin de que el alumno adquiera seguridad y verifique su comprensión.

Contenido:

- Conjuntos
- Números reales
- Funciones
- Límites y continuidad
- La derivada
- Aplicaciones de la derivada

RSP17.5.1.6A

ISBN 968-24-31



9 789662 431500